

חשיבה מתמטית – 50450002 - בחינה סופית

סמסטר א' תשפ"ד, תאריך: 13.09.24

משך הבחינה – 3 שעות ; חומר עזר – אסור.

מרצים: אבי גורן, אלבינה חייטין-חנקין, ויקטור ניקולאייבסקי, עופר ברעם.

לפניכם בחינה בשני חלקים:

חלק א' – שאלות פתוחות – 70 נקודות.

חלק ב' – שאלות סגורות – 30 נקודות.

הנחיות למענה מופיעות בתחילת כל חלק.

יש להחזיר את דף התשובות ביחד עם הבחינה, אחרת הבחינה לא תיבדק!

לשימוש המרצים:

| חלק        | א  |    |    | ב   |
|------------|----|----|----|-----|
| שאלה       | 1  | 2  | 3  | 1-5 |
| ציון       |    |    |    |     |
| ציון מירבי | 24 | 22 | 24 | 30  |

בהצלחה!

חלק א' – שאלות פתוחות - 70 נקודות

בחלק זה 3 שאלות פתוחות. יש לענות על שלושתן.  
את התשובות יש לכתוב על גבי השאלון עצמו במקום המיועד לכך.  
מחברות הטיוטה והנספחים לא יבדקו!

**1) סעיף א' (9 נקודות)**

בכל אחד משלושת הסעיפים הבאים רשמו פסוק השקול לשלילת הפסוק הנתון,  
מבלי להשתמש בסימן השלילה ( $\neg$ ). כתבו תשובה סופית בלבד:

א1.  $\forall x \exists y \exists z ((x \neq y \vee y \geq z) \rightarrow (x = z \wedge y < z))$

---

---

---

א2.  $\exists x \forall y (\forall z (z < x \wedge z \leq y) \vee \forall z (z > x \vee z \geq y))$

---

---

---

א3.  $\exists x (x > 700 \wedge \forall y (x > y \oplus \forall z (y \leq z)))$

---

---

---

**(1) סעיף ב' (15 נקודות)**

עבור כל אחד מהפסוקים הבאים, קבעו האם הוא אמיתי לוגית בקבוצת ההתייחסות  $\mathbb{Z}$ .

$$\forall x \forall y \left( \left( \forall z (z < x) \vee \forall z (z > y) \right) \rightarrow x = y \right) . \mathbf{N}$$

**האם הפסוק אמיתי לוגית? תשובה: כן / לא (נקודה אחת). נימוק (4 נקודות):**

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

$$\forall x \exists y \left( (\exists z (z < x) \wedge \exists z (z > y)) \rightarrow x \neq y \right) . \blacksquare$$

**האם הפסוק אמיתי לוגי? תשובה: כן / לא (נקודה אחת). נימוק (4 נקודות):**

This image shows a blank sheet of white paper with horizontal ruling lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page. There are no margins, text, or other markings on the paper.

**האם הפסוק אמיתי לוּגִית? תשובה: כן / לא** (נקודה אחת). **נימוק** (4 נקודות):

[illegible]

**מועצה אזורית קטנה מציעה לילדים 3 חוגי ספורט: קראטה, ג'אגלינג והתעמלות אומנותית.**

- 15 ילדים נרשמו רק לקראטה.
- 34 ילדים נרשמו לקראטה אך ג'אגלינג
- 26 ילדים נרשמו לג'אגלינג אך התעמל
- 10 ילדים נרשמו לפחות לשני חוגים.

**ענו על השאלות הבאות:**

א. (4 נקודות) כמה ילדים נרשמו רק לג'אולינג?

ב. (4 נקודות) כמה ילדים נרשמו רק להתעמלות אומנותית? \_\_\_\_\_

ג. (4 נקודות) כמה ילדים נרשמו לפחות לחוג אחד?

## 2) סעיף ב' (10 נקודות):

נתונות הקבוצות הבאות, המוכלות בקבוצה אוניברסלית  $\mathbb{Z}$ :

$$A = \{4k - 27 \mid k \in \mathbb{Z}\}, \quad B = \{6k - 37 \mid k \in \mathbb{Z}\}, \quad D = \{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq 144\}$$

ענו על הסעיפים הבאים. יש להציג תשובה סופית בלבד!  
משקל כל סעיף 2 נקודות.

### שימו לב (!)

יש לרשום את פתרון הקבוצות בהצגה לפי מבנה, ע"פ עקרון יחס חלוקה ושארית אשר נלמד בהרצאות, כך שהשארית לא שלילית וקטנה מהמחלק.

למשל: הביטוי  $\{5k + 3 \mid k \in \mathbb{Z}\}$  הינו דוגמה לקבוצת כל השלמים שיוצרים שארית 3 לאחר חלוקה ב-5.

בביטוי זה השארית מקיימת:  $0 \leq 3 < 5$  כנדרש.

1.  $A \cap B =$  \_\_\_\_\_

2.  $A \setminus B =$  \_\_\_\_\_

3.  $B \setminus A =$  \_\_\_\_\_

4.  $A \cap B \cap D =$  \_\_\_\_\_

5.  $|A \cap B \cap D| =$  \_\_\_\_\_

**3) (24 נקודות) נתונה הפונקציה הבאה:**

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$f(x) = (x - a)^2 + 1$$

$$a \in \mathbb{N}$$

א. (3 נקודות) נתון כי הפונקציה  $f$  היא חד-חד-ערכית.

מצאו את  $a$ . נמקו את קביעתכם.

[illegible]

ב. (5 נקודות) הוכיחו כי הפונקציה  $f$  היא חד-חד-ערכית עבור הערך  $a$  שמצאתם בסעיף הקודם.

רשמו את ההוכחה על פי הגדרה מתמטית בלבד! הסבר אחר לא יתקבל.

[illegible]

[illegible]

ד. (8 נקודות) נתונה הפונקציה  $g$  המוגדרת באופן הבא:

$$\mathbf{g} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x) = 2 \cdot (\sqrt{x-1} + a)$$

**(5 נקודות) חשבו את  $g \circ f$**

**ציינו את התחום ואת הטווח של הפונקציה. הציגו את שלבי החישוב!**

הערה:  $f$  נתונה בראש השאלה.  $a$  הוא הפרמטר שמצאתם בסעיף א'.

[illegible]

---

---

---

---

---

---

**חלק ב – שאלות סגורות - 30 נקודות**

בחלק זה 5 שאלות (שאלות 1 עד 5). יש לענות על כולן. משקל כל שאלה 6 נקודות.  
בכל שאלה יש לסמן את התשובה הנכונה (אחת בלבד), באופן ברור, בדף התשובות בלבד.

**שימו לב (!)** בסעיפים אשר מוצגים מעטה ואילך יתקבלו תשובות שנכתבו על נספח דף תשובות המיועד בלבד! לא  
יידקו תשובות שלא נכתבו בדף המיועד לכך. אם סימנתם יותר מתשובה אחת - השאלה תיפסל!

1) נתון הפסוק הבא: "אשב בסוכת המציל או ש ( אסבול בחום הכבד אם ורק אם לא אשים קרם הגנה )" מי מבין הפסוקים הבאים אינו שקול לפסוק הנתון?

- א. אם לא אשב בסוכת המציל, אז ( לא אסבול בחום הכבד אם ורק אם אשים קרם הגנה ).
- ב. אם לא אשב בסוכת המציל, אז אין זה נכון ש ( לא אשים קרם הגנה אם ורק אם לא אסבול בחום הכבד ).
- ג. אין זה נכון ש ( לא אשב בסוכת המציל וגם ( אסבול בחום הכבד אם ורק אם אשים קרם הגנה ) ).
- ד. ( לא אשב בסוכת המציל וגם ( אם אשים קרם הגנה אז לא אסבול בחום הכבד ) וגם (אם לא אשים קרם הגנה אז אסבול בחום הכבד ) ) או שאשב בסוכת המציל.
- ה. ( לא אסבול בחום הכבד אם ורק אם אשים קרם הגנה ) או ש ( אשב בסוכת המציל וגם ( אם אשים קרם הגנה אז אסבול בחום הכבד ) וגם ( אם אסבול בחום הכבד אז אשים קרם הגנה ) ).
- ו. אשים קרם הגנה ולא אסבול בחום הכבד, או שלא אשים קרם הגנה ואסבול בחום הכבד, או שאין זה נכון שלא אשב בסוכת המציל.
- ז. כל הפסוקים האחרים שקולים לפסוק הנתון.

(2) נתונים שני פסוקים  $\alpha$  ו- $\beta$  כך ש  $\alpha \wedge \beta$  סתירה.

מה ניתן להסיק בוודאות מנתון זה?

א.  $\alpha$  סתירה או  $\beta$  סתירה.

ב.  $\alpha$  לא טאוטולוגיה וגם  $\beta$  לא טאוטולוגיה.

ג.  $\alpha \Rightarrow \beta$

ד.  $\neg \alpha \Rightarrow \neg \beta$

ה.  $\alpha \Rightarrow \neg \beta$

ו.  $\neg \alpha \Rightarrow \beta$

ז. לא יתכן שמבין 6 הטענות האחרות בדיוק אחת ניתן להסיק בוודאות.

(3) נתונה  $A = \{1, 2\}$  בקבוצת התייחסות  $P(A)$ .

$X \in P(A)$  קבוצה כך ש  $X$  מבין 6 הטענות בהן מופיעה  $X$ , איזו טענה אינה פסוק אמת?

א.  $\exists X(X \subseteq A) \leftrightarrow \exists X(A \subseteq X)$

ב.  $\forall X(X \subset A) \leftrightarrow \exists X(A \subset X)$

ג.  $\exists X((X \subset A) \leftrightarrow (A \subset X))$

ד.  $\forall X((X \subseteq A) \oplus (A \subseteq X))$

ה.  $\forall X(X \subset A) \oplus \exists X(A \subseteq X)$

ו.  $\exists X(X \subset A) \oplus \forall X(A \subseteq X)$

ז. כל אחת מהטענות האחרות היא פסוק אמת.

(4) נתונה ההתאמה:  $f(n) = n^2 - 1$

באילו מקבוצות התחום והטווח הבאות, תיווצר התאמה שאיננה פונקציה?

א.  $f: \mathbb{N}_{\text{even}} \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{odd}}$

ב.  $f: \mathbb{Z}_{\text{odd}} \rightarrow \mathbb{N}_{\text{even}}$

ג.  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$

ד.  $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$

ה.  $f: \mathbb{Z}_{\text{odd}} \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{even}}$

ו.  $f: \mathbb{Z}_{\text{even}} \rightarrow \mathbb{Z}_{\text{odd}}$

ז. כל האפשרויות המוצגות בסעיפים האחרים יוצרות פונקציה.

ידוע כי:

- לכל תכונה ישנה בדיוק אותה כמות של דיירים אבל יש דיירים בעלי יותר מתכונה אחת.
- כמות הדיירים שהם רק שמחים או רק רגשניים שווה לכמות הדיירים שהם (שמחים וגם רגשניים) אך לא מרוגזים.
- כמות הדיירים שהם רק שמחים או רק מרוגזים שווה לכמות הדיירים שהם (שמחים וגם מרוגזים) אך לא רגשניים.
- כמות הדיירים שהם רק רגשניים או רק מרוגזים שווה לכמות הדיירים שהם (רגשניים וגם מרוגזים) אך לא שמחים.

מי מבין הטענות הבאות בוודאות לא תתכן?

- א. כמות הדיירים שהם רק שמחים או רק מרוגזים שווה לכמות הדיירים שהם רגשניים וגם מרוגזים.
- ב. כמות הדיירים שהם שמחים וגם רגשניים שווה לכמות הדיירים שהם שמחים וגם מרוגזים.
- ג. כמות הדיירים שהם שמחים וגם רגשניים ועוד כמות הדיירים שהם רגשניים וגם מרוגזים שווה לכמות הדיירים שהם שמחים או רגשניים.
- ד. כמות הדיירים השמחים כפולה מכמות הדיירים שהם (שמחים או רגשניים) אך לא מרוגזים.
- ה. כמות הדיירים שלהם שתי תכונות בלבד כפולה מכמות הדיירים שלהם תכונה אחת בלבד.
- ו. כמות הדיירים השמחים ועוד כמות הדיירים הרגשניים שווה לכמות הדיירים הרגשניים או מרוגזים.
- ז. אין אף דייר שהוא שמח וגם רגשן וגם מרוגז.