

חשיבה מתמטית – 50450002 - בוחן אמצע

סמסטר קיץ תשפ"ג, תאריך: 21.08.24

משך הבחינה – 3 שעות; חומר עזר – אסור.

מרצים: אבי גורן, אלבינה חייטין-חנקין, ויקטור ניקולאייבסקי, עופר ברעם.

לפניך בחינה בארבעה חלקים:

חלק א' – שאלות פתוחות – 48 נקודות.

חלק ב' – שאלות סגורות – 52 נקודות:

פרק א' – שאלות סגורות – 12 נקודות.

פרק ב' – שאלות סגורות – 10 נקודות.

פרק ג' – שאלות סגורות – 30 נקודות.

הנחיות למענה מופיעות בתחילת כל חלק.

יש להחזיר את דף התשובות ביחד עם הבחינה, אחרת הבחינה לא תיבדק!

בהצלחה!

בחלק זה שאלות פתוחות. יש לענות על השאלות על גבי טופס הבחינה במקום המיועד לכך.

(1) (10 נקודות)

נתונות 3 קבוצות A, B, C המוכלות בקבוצה אוניברסלית U .

הקבוצות מקיימות:

$$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$$

$$A \setminus (B \cup C) = \{2\}, \quad C \setminus (A \cup B) = \{1\}$$

$$A \Delta B = \{2,3,4,6\}, \quad A \Delta C = \{1,2,3,7\}, \quad B \cap C = \{3,5\}$$

מצאו את הקבוצות הבאות:

- יש לרשום תשובה סופית בלבד!
- במידה ולא ניתן לקבוע באופן חד משמעי את הקבוצה המבוקשת, ציינו זאת ללא הסברים נוספים.
- אין חובה למלא את דיאגרמת ון המצורפת. הבדיקה תתבצע אך ורק ע"פ התשובה ולא ע"פ הדיאגרמה.

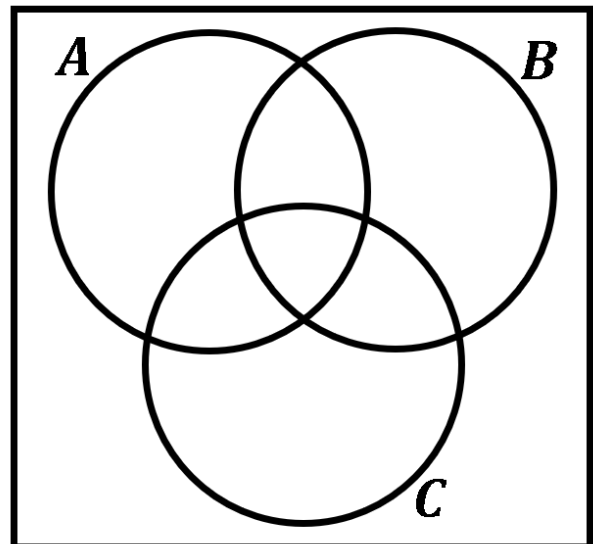
$$A \cup B = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$A \setminus C = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$B \setminus (A \cup C) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$B \Delta C = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\bar{A} \cap \bar{B} = \underline{\hspace{2cm}}$$



(2) (13 נקודות)

נתונים שני הפסוקים הבאים:

$$\alpha := P \rightarrow \neg Q$$

$$\beta := (Q \vee R) \rightarrow \neg P$$

מלאו את הערכים הלוגיים בטבלת האמת הבאה וקבעו האם: $\alpha \Rightarrow \beta$?

יש לנמק את קביעתכם על סמך הטבלה בלבד.

P	Q	R	$\neg P$	$\neg Q$	$P \rightarrow \neg Q$	$Q \vee R$	$(Q \vee R) \rightarrow \neg P$	$\alpha \rightarrow \beta$

תשובה: כן / לא

נימוק:

(3) (10 נקודות - בהמשך לנתוני שאלה 2)

הוכיחו באמצעות זהויות לוגיות את הגרירה הבאה: $\beta \Rightarrow \alpha$

הנחיה: יש לפשט את הביטוי $\beta \rightarrow \alpha$ בהצבת המשתנים P, Q, R

ולהראות שהוא שקול לטאוטולוגיה (T). המשיכו לפשט את השלב הראשון אשר מוצג להלן!

שימו לב:

- הנכם נבחנים על שימוש מתמטי נכון בזהויות לוגיות.
- מותר להשתמש אך ורק בזהויות המופיעות ברשימת הזהויות שבחוברת הלימוד.
- בכל שלב יש להשתמש בזהות מסוג אחד בלבד!

$$\beta \rightarrow \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ((Q \vee R) \rightarrow \neg P) \rightarrow (P \rightarrow \neg Q)$$

$\Leftrightarrow$ _____

[illegible]

4) במערב הפרוע חיו שלושה אקדוחנים ידועים לשמצה: הטוב, הרע והלא נורא. ידוע שהטוב תמיד דובר אמת והרע תמיד משקר. יום אחד פגש אותם השריף וסיפר כי בידי אסיר החביא אוצר של זהב. "עזרו לי לגלות היכן ידידכם האסיר החביא את האוצר, אחרת הוא לא ישוחרר" אמר השריף. ידוע כי האוצר הוחבא בדיוק באחד מבין המקומות הבאים: בעמק הנסתר, בקצה של ההר או קבור במדבר. אמר הלא נורא: "אין זה נכון ש (אם אוצר הזהב קבור במדבר אז האסיר ישוחרר)". אמר הטוב: "אוצר הזהב נמצא בעמק הנסתר אם ורק אם הלא נורא דובר אמת". אמר הרע: "אוצר הזהב נמצא בקצה ההר אם ורק אם הלא נורא משקר".

סעיף א (15 נקודות)

סמנו:

A – אוצר הזהב נמצא בעמק הנסתר

B – אוצר הזהב נמצא בקצה ההר

C – אוצר הזהב קבור במדבר

D – האסיר ישוחרר

הצרינו באמצעות משתנים אלו בלבד את הצהרותיהם של שלושת האקדוחנים:

I) הצרינו את דבריו של הלא נורא (5 נקודות):

II) הצרינו את דבריו של הטוב (5 נקודות):

III) הצרינו את דבריו של הרע (5 נקודות):

חלק ב – שאלות סגורות – 52 נקודות

בחלק זה 21 שאלות, יש לענות על כולן. משקל השאלות **אינו** זהה – ויצוין לצד כל פרק. בכל שאלה יש לסמן את התשובה הנכונה ביותר (אחת בלבד), באופן ברור, בדף התשובות בלבד.

שימו לב (!) בסעיפים אשר מוצגים מעתה ואילך יתקבלו תשובות שנכתבו על נספח דף תשובות המיועד בלבד! לא ייבדקו תשובות שלא נכתבו בדף המיועד לכך. אם סימנתם יותר מתשובה אחת - השאלה תיפסל!

פרק א' – שאלות סגורות – 12 נקודות (משקל כל שאלה 2 נקודות)

להלן המשך שאלה 4 של החלק הפתוח - סעיף ב:

עבור כל אחת מהטענות הבאות, קבעו אם היא נכונה, לא נכונה, או שלא ניתן לקבוע את נכונותה:

(1) אוצר הזהב נמצא בעמק הנסתר

- א. נכון
- ב. לא נכון
- ג. לא ניתן לקבוע

(2) אוצר הזהב נמצא בקצה ההר

- א. נכון
- ב. לא נכון
- ג. לא ניתן לקבוע

(3) אוצר הזהב קבור במדבר

- א. נכון
- ב. לא נכון
- ג. לא ניתן לקבוע

(4) הלא נורא דיבר אמת

- א. נכון
- ב. לא נכון
- ג. לא ניתן לקבוע

(5) האסיר ישוחרר

- א. נכון
- ב. לא נכון
- ג. לא ניתן לקבוע

6) הטוב דיבר אמת אם ורק אם הרע שיקר

- א. נכון
- ב. לא נכון
- ג. לא ניתן לקבוע

פרק ב' – שאלות סגורות – 10 נקודות (משקל כל שאלה נקודה אחת)

$$A = \left\{ 1.\bar{7}, 4, \left\{ \frac{16}{9}, 4 \right\} \right\}$$

$$B = \left\{ \emptyset, \{4\}, \frac{16}{9} \right\}$$

$$C = \left\{ \{\emptyset\}, \{\emptyset, 4\}, \frac{16}{9}, 4 \right\}$$

(הערה: $1.\bar{7}$ הוא השבר המחזורי האינסופי $1.777777777777...$)

עבור כל אחת מהטענות שבשאלות 7-16, קבעו האם היא נכונה או לא נכונה עבור קבוצות אלו:

$$A \Delta B = A \cup B \quad (7)$$

- א. נכון
- ב. לא נכון

$$(A \setminus B) \cup (B \cap C) = (A \cup B) \setminus (B \setminus C) \quad (8)$$

- א. נכון
- ב. לא נכון

$$A \Delta (A \cap C) \subset A \setminus (B \cup C) \quad (9)$$

- א. נכון
- ב. לא נכון

$$B \setminus C \subset A \Delta B \leftrightarrow C \setminus B \subset A \Delta C \quad (10)$$

- א. נכון
- ב. לא נכון

$$B \setminus \emptyset \subset B \leftrightarrow C \setminus \{\emptyset\} \subset C \quad (11)$$

א. נכון

ב. לא נכון

$$A \cap \left\{ \frac{16}{9}, 4 \right\} \in A \setminus \left\{ \frac{16}{9}, 4 \right\} \quad (12)$$

א. נכון

ב. לא נכון

$$A \cap C \subset \left\{ \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \mid n \in \mathbb{N} \right\} \quad (13)$$

א. נכון

ב. לא נכון

$$(A \cap [1,4] \subset C) \oplus (C \cap [1,4] \subset B) \oplus (B \cap [1,4] \subset A) \quad (14)$$

א. נכון

ב. לא נכון

$$\{A \cap C\} \subset A \oplus \{(B \cap C) \setminus A\} \in C \quad (15)$$

א. נכון

ב. לא נכון

$$|A \setminus \{A \cap C\}| = |B| - |A \cap B \cap C| \quad (16)$$

א. נכון

ב. לא נכון

פרק ג' – שאלות סגורות – 30 נקודות

בחלק זה 5 שאלות. יש לענות על כולן. משקל כל שאלה 6 נקודות.
לכל שאלה יש תשובה נכונה אחת בלבד! יש לסמנה באופן ברור בדף התשובות.

17) באי האמת והשקר שני שבטים, בני השבט האחד דוברים רק אמת ובני השבט השני משקרים תמיד. בהגיעכם לאי אתם פוגשים בגבר, באשה ובילד.

הילד אומר: "אני משקר, או ש (הגבר משקר אם ורק אם האישה דוברת אמת)".

הגבר אומר: "אם (האישה דוברת אמת או שהילד משקר), אז אני והילד משקרים".

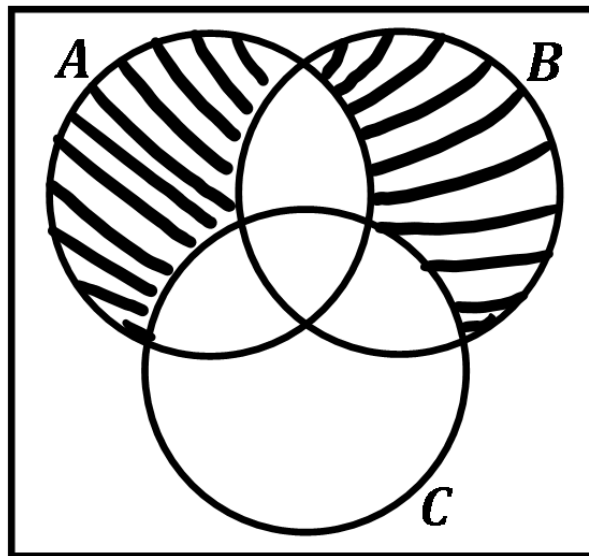
קבעו מי מבין השלושה בוודאות משבט דוברי האמת:

- א. רק הילד
- ב. רק הגבר
- ג. רק האישה
- ד. רק הילד והגבר
- ה. רק הילד והאישה
- ו. רק הגבר והאישה
- ז. כל השלושה

18) מי מבין הפסוקים המוצגים אינו שקול לפסוק: $P \rightarrow Q$

- א. $(P \oplus Q) \rightarrow Q$
- ב. $P \rightarrow (\neg P \oplus Q)$
- ג. $P \rightarrow (P \oplus \neg Q)$
- ד. $P \rightarrow (P \vee \neg Q)$
- ה. $(P \vee Q) \rightarrow Q$
- ו. $P \rightarrow (\neg P \vee Q)$
- ז. כל הפסוקים האחרים שקולים לפסוק הנתון.

19) איזה ביטוי לא מייצג את הקבוצה המסומנת בדיאגרמת ון הבאה:



א. $(A \Delta B \Delta C) \setminus C$

ב. $(A \Delta B \Delta C) \setminus \overline{(A \cup B)}$

ג. $((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)) \setminus C$

ד. $(A \setminus (B \cup C)) \cup (B \setminus (A \cup C))$

ה. $((A \Delta C) \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (B \cap \overline{A} \cap \overline{C})$

ו. $((A \Delta B) \cup (B \Delta C)) \setminus (C \cup (A \cap B))$

ז. כל אחד מהביטויים בסעיפים האחרים מייצג את הקבוצה המסומנת בדיאגרמה.

20 נתונה הקבוצה: $A = \{2, 3, \{2, 3\}\}$

תהי X קבוצה לא ריקה כך ש $X \subseteq A$. מבין 6 הטענות בהן מופיעה X , איזו טענה בוודאות לא תתכן?

א. $X \subset A \Delta [2, 3]$

ב. $A \Delta \{2, 3\} \subset X \subset A$

ג. $(A \setminus \mathbb{N} \subset X) \wedge (X \subset A \setminus \{\mathbb{N}\})$

ד. $X \subseteq A \Delta \{2\} \Delta \{3\} \Delta \{2, \{2, 3\}\}$

ה. $X \subset A \cap [2, 3] \leftrightarrow A \cap [2, 3] \subset X$

ו. $X \setminus \{\{2, 3\}\} \subseteq A \cap [2, 3] \leftrightarrow A \cap (2, 3] \subseteq X \setminus \{\{2, 3\}\}$

ז. כל אחת מהטענות האחרות יכולה להיות אמיתית.

21 נתונה הקבוצה $A = \mathbb{Q} \cup [-5, 5]$ המוכלת בקבוצה האוניברסלית $\mathbb{R}$.

סמנו את הטענה הנכונה מבין כל הטענות הבאות:

א. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{Q} \rightarrow (x < -5 \vee x > 5)\}$

ב. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{Q} \rightarrow (x < -5 \vee x > 5)\}$

ג. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x < -5 \vee x > 5) \rightarrow x \notin \mathbb{Q}\}$

ד. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{Q} \rightarrow (-5 \leq x \leq 5)\}$

ה. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{Q} \rightarrow (-5 \leq x \leq 5)\}$

ו. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (-5 \leq x \leq 5) \rightarrow x \notin \mathbb{Q}\}$

ז. אין זה נכון שמבין כל הטענות האחרות בדיוק אחת נכונה.