פרק 2: הבעיה האקונומטרית

2.1. הצגת הבעיה

תיאוריות כלכליות טוענות לקשרים שונים בין המשתנים הכלכליים; האקונומטריקה מנסה לכמת את עוצמתם של קשרים אלה. אם למשל X ו-Y הם משתנים כלכליים כלשהם, נניח הכנסה ותצרוכת, אשר התיאוריה גורסת כי X מסביר את Y, וכן הקשר בינהם ניתן לתיאור על ידי משוואה מהצורה $Y = \alpha + \beta X$, אזי מטרת האקונומטריקה היא לאמוד את גודלם של α ו-β ובכך לכמת את עוצמת הקשר שבין המשתנים.

המשתנים X ו-Y נצפים, כלומר יש בידינו מדגם עם ערכם של המשתנים עבור תצפיות שונות. לעומת זאת, איננו יודעים את ערכי הפרמטרים, α ו-β, ומטרתנו היא לאמוד את גודלם. כלומר, נרצה להעריך את ערכו של Y כאשר $X = 0$ (α), וכן בכמה יחידות גדל / קטן Y אם X גדל ביחידה אחת (β). יש לציין כי לעולם לא נדע את ערכם המדוייק של α ו-β, כל שאנו יכולים לקוות הוא שתצפיות על X ו-Y יתנו לנו מושג כלשהו על גודלם.

2.2. לינאריות בפרמטרים

אנו נתמקד בהשפעות לינאריות בלבד של המשתנה המסביר (X) על המשתנה התלוי (Y), הקרוי גם המשתנה המוסבר. כלומר שהמודל הנאמד יהיה מהצורה הבאה:

$$Y = \alpha + \beta X$$

יש לשים לב כי הלינאריות מתייחסת לפרמטרים (α ו-β) ולא למשתנים (X ו-Y), כלומר שהשפעת X על Y היא השפעה לינארית. מכאן שגם המשוואות הבאות הן **לינאריות בפרמטרים**:

$$Y^2 = \alpha + \beta X \qquad (1)$$

$$Y = \alpha + \beta \ln(X) \qquad (2)$$

להבהרת הנקודה נציין כי במשוואה (1) ניתן להגדיר משתנה חדש (W), המוגדר כ - $W \equiv Y^2$, וכך ע"י הצבתו במשוואה נקבל: $W = \alpha + \beta X$. באותה דרך, ניתן להגדיר $Z \equiv \ln(X)$, והצבתו במשוואה (2) תיתן: $Y = \alpha + \beta Z$.

מנגד, המשוואות הבאות אינן לינאריות בפרמטרים:

$$Y = \alpha + X^{\beta} \qquad (3)$$

$$Y = \alpha \cdot \beta + \gamma X \qquad (4)$$

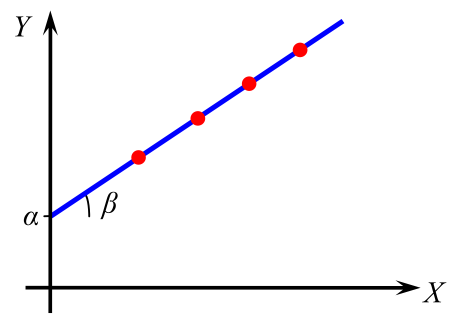
משוואה (3) איננה לינארית בפרמטרים משום שהפרמטר β, מופיע כמעריך, ואילו משוואה (4) איננה לינארית בפרמטרים משום שהיא מכילה מכפלת פרמטרים.

לסיכום, נאמר כי משוואה היא לינארית בפרמטרים, אם הפרמטרים הנאמדים מכפילים את המשתנים המסבירים במשוואה, או עומדים בפני עצמם.

2.3. ההפרעה המקרית

נחזור למודל הפשוט: $Y = \alpha + \beta X$. X ו-Y הם כאמור משתנים כלכליים כלשהם הניתנים לצפייה ומדידה, α ו-β הם פרמטרים בלתי נצפים אותם נרצה לאמוד. על פי המודל, אם נדגום תצפיות של X ו-Y ונסמן את הנקודות על מערכת צירים, הרי שחיבורן בקו ייתן את התמונה הבאה:

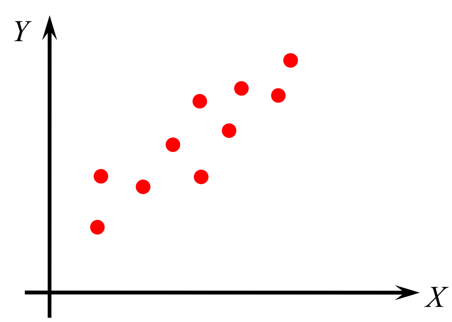
איור 2.1: קשר לינארי מושלם בין X ו-Y



כאשר α הוא החותך, כלומר ערכו של Y כאשר $X = 0$, ו-β הוא שיפוע הקו ($\partial Y/\partial X$).[1] אם זה היה המצב במציאות, הרי שבכדי לאמוד את החותך, α, והשיפוע, β, די היה לדגום שתי תצפיות בלבד, כלומר שני זוגות של X ו-Y. כל תצפית מגדירה נקודה במישור X-Y, ודי בשתי נקודות בכדי לחשוף בפנינו את הקו כולו ומכאן שגם את ערכי החותך והשיפוע.

מובן כי המציאות מורכבת יותר, והתוויות התצפיות במערכת צירים סביר שלא תיצור קו ישר מושלם כמוצג באיור 2.1. הדיאגרמה המתקבלת מהתווית התצפיות במערכת צירים אחת נקראת **דיאגרמת הפיזור**. לרוב דיאגרמת הפיזור תראה כמוצג באיור 2.2.

איור 2.2: דיאגרמת הפיזור



עד כה הנחנו כי את הקשר בין X ל-Y ניתן לתאר על ידי המשוואה $Y = \alpha + \beta X$; אמנם יתכן כי X הוא הגורם העיקרי המסביר את Y, אך במציאות קיימים עוד אינספור משתנים, מלבד X,

[1] למשמעות β במשוואות שאינן לינאריות **במשתנים** ראו פירוט בנספח לפרק זה.

המשפיעים על Y אך השפעת כל אחד מהם בנפרד זניחה ואף איננה עקבית מתצפית לתצפית. משתנים נוספים אלו הם הסיבה לצורתה של דיאגרמת הפיזור, כלומר הם הגורם המסביר מדוע ענן התצפיות אינו יוצר קו לינארי מושלם. מהסבר זה עולה כי הצגת התנהגות Y באמצעות קו לינארי מושלם איננה מלאה, ויש לתת ייצוג לכל אותם גורמים אקראיים. את גורמים אלה נרכז במשתנה אחד אותו נכנה **כהפרעה מקרית**. נסמן את ההפרעה המקרית באות היוונית ε (אפסילון).

כעת יש בידינו את המרכיבים הנחוצים להצגתו המלאה של המודל האקונומטרי המסביר את התנהגותו של Y, מעתה נכתוב את המודל כך:

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i$$

בנוסף להפרעה המקרית התווסף למשוואה גם האינדקס i. אינדקס זה מעיד על כך שהמשוואה מתקיימת לכל התצפיות במדגם, והוא מציין את מספר התצפית. אם במדגם N תצפיות הרי ש: $i = 1,2,3...N$. יש לשים לב כי האינדקס התווסף למשתנים בלבד (X, Y, ε), מכיוון שהם מקבלים ערכים שונים בתצפיות שונות. הפרמטרים α ו-β אינם מקבלים אינדקס מכיוון שהם אינם משתנים מתצפית לתצפית.

2.4. סוגי מדגמים

נהוג להבחין בשני סוגי מדגמים עיקריים: **חתכי רוחב וסדרות עתיות**. חתך רוחב הוא מדגם הנערך בנקודת זמן אחת על שחקנים כלשהם במשק (משקי בית, פירמות, מדינות וכדומה). לדוגמא, מדגם הכולל מחירי תשומות, עלות גורמי הייצור, ומחירי המוצרים של מפעלים בענף הטכסטיל בשנה כלשהי מהווים חתך רוחב (בעזרתו ניתן לאמוד פונקצית עלות). סדרה עתית היא מדגם הנערך על אותו שחקן לאורך זמן. לדוגמא, מדגם הכולל את שער הריבית, רמת המחירים, התוצר וכמות הכסף בישראל מקום המדינה ועד היום (בנתונים חודשיים / רבעוניים / שנתיים) מהווה מדגם המבוסס על סדרות עתיות המאפשר את אמידת עקומת הביקוש לכסף במשק הישראלי. נציין כי ניתן גם לשלב בין סוגי המדגמים ולקבל **פאנל** שהוא אוסף של חתכי רוחב בנקודות זמן שונות, אך אנו נעסוק בשני הסוגים הראשונים בלבד.

ההבחנה בין סוגי המדגמים באה לידי ביטוי גם בסימונים שונים השמורים לכל אחד מסוגי המדגמים, כפי שמוצג בטבלה 2.1:

טבלה 2.1: סימונים מקובלים בחתכי רוחב לעומת סדרות עתיות

	חתכי רוחב	סדרות עתיות
אינדקס התצפית	i	t
מספר התצפיות	N	T
ההפרעה המקרית	ε	u

סיכום פרק 2:

- במודל $Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i$, מטרתנו היא לאמוד את הפרמטרים α ו- β. אנו **לעולם** לא נדע את ערכם המדוייק, אך באמצעות איסוף תצפיות על X ו-Y ננסה להעריך את גודלם.
- אנו נעסוק במשוואות לינאריות בפרמטרים בלבד. נאמר כי משוואה היא לינארית בפרמטרים, אם הפרמטרים הנאמדים מכפילים את המשתנים המסבירים במשוואה, או עומדים בפני עצמם.
- התווית ערכי X ו-Y על מערכת צירים יוצרת את דיאגרמת הפיזור. התצפיות אינן יושבות על קו ישר עקב קיומה של הפרעה מקרית המכילה את כל אותם גורמים המשפיעים באופן בלתי צפוי (אקראי) על Y.
- מדגמים מתחלקים לשתי קבוצות עיקריות: חתכי רוחב (אוסף תצפיות בנקודת זמן אחת), וסדרות עתיות (תצפיות הנאספות בנקודות זמן שונות).

נספח 2.1: משמעות המקדמים במשוואות לוגריתמיות

לעיתים נרצה לאמוד משוואות שאינן לינאריות במשתנים, שכן משוואות לינאריות כופות השפעה שולית קבועה של X על Y. לעומת זאת בכלכלה נהוג לעיתים קרובות לחשוב על ההשפעה השולית כפוחתת עם עליית ערכו של המשתנה המסביר. כך למשל, תפוקה שולית פוחתת משמעותה שהשפעת תשומת העבודה (המשתנה המסביר) על התפוקה (המשתנה התלוי) הולכת וקטנה ככל שמעסיקים יותר עובדים, או לחילופין התועלת השולית הולכת וקטנה ככל שצורכים יותר ממוצר כלשהו.

במקרים רבים נהוג בכלכלה לעבוד עם פונקציות מטיפוס קוב-דגלאס:

$$Y_i = AX_i^{\beta} e^{\varepsilon_i}$$

עבור β<1 הפונקציה מגלמת השפעה שולית פוחתת. ברור כי משוואה זו איננה לינארית בפרמטרים ולכן לא נוכל לאמוד אותה בצורתה הנוכחית, מכאן שנרצה להביא אותה לצורה לינארית בפרמטרים. לצורך כך נוציא $\ln$ משני אגפי המשוואה, ונקבל:

$$\ln(Y_i) = \ln(A) + \beta \ln(X_i) + \varepsilon_i$$

יש לשים לב כי A הוא קבוע ולכן גם $\ln(A)$ הוא קבוע, נסמנו, לצורך הנוחות, ב-α. כעת נוכל לכתוב את המשוואה הנאמדת כך:

$$\ln(Y_i) = \alpha + \beta \ln(X_i) + \varepsilon_i$$

משוואה זו לינארית בפרמטרים ולכן נוכל לאמוד אותה. יחד עם זאת עולה השאלה מהי משמעות המקדמים בספציפיקציה זו. כזכור, עבור המשוואה הלינארית $Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i$, המקדם β הוא הנגזרת של Y לפי X ($\partial Y/\partial X$), כלומר עבור כל עליה ביחידה אחת של X המשתנה Y גדל ב-β יחידות. הפעם לפנינו משוואה לוגריתמית ומובן כי במקרה זה β איננו הנגזרת של Y לפי X. למרות

קושי זה אנו בכל זאת ננסה להבין את משמעותו של β דרך הנגזרת. מגזירת פונקצית קוב-דגלאס מקבלים:

$$\frac{\partial Y_i}{\partial X_i} = \beta A X_i^{\beta-1} e^{\varepsilon_i} = \beta \frac{A X_i^{\beta} e^{\varepsilon_i}}{X_i}$$

יש לשים לב כי המונה הוא בדיוק Y_i, כלומר קיבלנו כי:

$$\frac{\partial Y_i}{\partial X_i} = \beta \frac{Y_i}{X_i}$$

ולכן:

$$\beta = \frac{\partial Y_i}{\partial X_i} \cdot \frac{X_i}{Y_i}$$

אגף ימין הוא **גמישות** Y ביחס ל-X. כלומר, במשוואה לוגריתמית עבור עליה באחוז אחד של X, Y יגדל ב- β אחוזים.

נבחן כעת ספציפיקציות נוספות של משוואות בהן רק אחד המשתנים, המסביר או התלוי, הם לינארים בעוד שהשני לוגריתמי. נתחיל במשוואה בה המשתנה המסביר לינארי בעוד שהמשתנה התלוי לוגריתמי, כלומר:

$$\ln(Y_i) = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i$$

ממשוואה זו עולה כי:

$$Y_i = e^{\alpha + \beta X_i + \varepsilon_i}$$

נגזור את Y לפי X:

$$\frac{\partial Y_i}{\partial X_i} = \beta e^{\alpha + \beta X_i + \varepsilon_i}$$

נציב $Y_i = e^{\alpha + \beta X_i + \varepsilon_i}$, ונקבל:

$$\frac{\partial Y_i}{\partial X_i} = \beta Y_i$$

לכן:

$$\beta = \frac{\partial Y_i / Y_i}{\partial X_i}$$

המונה מציין את **שיעור** השינוי ב-Y, בעוד שהמכנה מציין את השינוי (ביחידות) ב-X. כלומר שהפעם β מציין את הגידול באחוזים ב-Y כתוצאה מעליה ביחידה אחת של X. לסיום נבחן את המשוואה:

$$Y_i = \alpha + \beta \ln(X_i) + \varepsilon_i$$

נגזור את Y לפי X:

$$\frac{\partial Y_i}{\partial X_i} = \beta \cdot \frac{1}{X_i}$$

נבודד את β, ונקבל:

$$\beta = \frac{\partial Y_i}{\partial X_i / X_i}$$

המונה מציין את השינוי ב-Y (ביחידות), בעוד שהמכנה מציין את **שיעור** השינוי ב-X. כלומר שהפעם β מציין את הגידול ב-Y כתוצאה מעליה של אחוז אחד ב-X. טבלה 2.2 מסכמת את התוצאות.

טבלה 2.2: משמעות β בספציפיקציות שונות של המשוואה הנאמדת

המשוואה הנאמדת	משמעות β
$Y_i = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i$	בכמה יחידות גדל Y עם עליה ביחידה אחת ב-X
$\ln(Y_i) = \alpha + \beta \ln(X_i) + \varepsilon_i$	בכמה אחוזים גדל Y עם עליה באחוז אחד ב-X
$\ln(Y_i) = \alpha + \beta X_i + \varepsilon_i$	בכמה אחוזים גדל Y עם עליה ביחידה אחת ב-X
$Y_i = \alpha + \beta \ln(X_i) + \varepsilon_i$	בכמה יחידות גדל Y עם עליה באחוז אחד ב-X