פרק 1: מבוא

1.1. פתיחה

ספר זה מסכם את החומר של הקורס מבוא לאקונומטריקה כפי שהוא נלמד במרבית המוסדות האקדמים בארץ. לספר שתי מטרות עיקריות. הראשונה היא הגשה בהירה ואינטואיטיבית של החומר הנלמד החל מנקודות המוצא הבסיסיות ביותר וכלה בחומר מתקדם יחסית שלעיתים איננו מוצג בכיתה. המטרה השניה היא להציג ביסודיות את כל הפיתוחים הפורמאלים הנלווים לקורס, ללא קיצורי דרך. לעיתים יש נטיה למרצים לדלג על פיתוחים אלה מפאת קוצר זמן אך בלעדיהם הבנת החומר לוקה בדרך כלל בחסר.

האקונומטריקה משתמשת בשיטות סטטיסטיות ולכן דורשת ידע בסיסי בסטטיסטיקה. בנוסף, להתמודדות מוצלחת עם החומר יש צורך בשליטה טובה באלגברה. ככלל, הידע הנדרש מסתכם בארבע פעולות החשבון תוך שימוש בחוקי הקיבוץ, החילוף, והפילוג. עם זאת, עקב הכתיבה המתמטית והשימוש השכיח בסימן הסכימה (Σ) קיימת נטיה להירתע מהפיתוחים האלגברים הנלווים לחומר. כאמור, לאורך הספר כולו יוצגו פיתוחים אלה בצורה ברורה ומפורטת.

פרק זה פותח בדיון קצר על מהות האקונומטריקה, ולאחר מכן עובר להצגת מספר תוצאות פורמאליות עליו מתבסס הקורס כולו. שליטה והבנה של יסודות אלה תקל משמעותית את ההתמודדות עם החומר שכן הפיתוחים השונים מתבססים שוב ושוב על אותן תוצאות בסיסיות.

1.2. מהי אקונומטריקה?

פירוש המילה אקונומטריקה הוא מדידת הכלכלה. המילה אקונומטריקה (econometrics באנגלית) מורכבת משתי מילים economics, כלומר כלכלה, ו-metrics שפירושה תורת המדידה. האקונומטריקה מודדת באמצעות שיטות סטטיסטיות את השפעתם של משתנים שונים על משתנים אחרים, ובכך מסייעת במתן תוקף אמפירי לתיאוריות כלכליות או לחילופין תורמת להפרכתן. בנוסף, התיאוריה הכלכלית רומזת לנו על **כיוון** ההשפעה בלבד של המשתנים, כך למשל נצפה כי עליה בריבית תקטין את ההשקעות במשק, או עליה במחיר מוצרים תצמצם את הכמות המבוקשת מהם. בהינתן כיווני ההשפעה השאלה המתבקשת היא **בכמה** תקטן ההשקעה, או הכמות המבוקשת. האקונומטריקה באה לעזרתנו במתן תשובות לשאלות אלו, ובאמצעותה ניתן ללמוד לא רק על כיוון ההשפעה של משתנים שונים אלא גם לאמוד את גודלה.

לצורך אמידת תופעה כלכלית כלשהי יש להניח תחילה את המודל התיאורטי המתאר אותה. המודל מורכב בדרך כלל ממספר משוואות ומתנאי שיווי משקל. כך למשל, ניתן להציג מודל פשוט של ביקוש והיצע למוצר כלשהו, שנסמנו ב-X, על ידי מערכת המשוואות הבאה:

משוואת הביקוש: $X^D = \alpha_0 + \alpha_1 P_X + \alpha_2 I$

משוואת ההיצע: $X^S = \beta_0 + \beta_1 P_X + \beta_2 P_L$

תנאי שיווי משקל: $X^D = X^S$

כאשר: X^D היא הכמות המבוקשת מהמוצר, X^S הכמות המוצעת, P_X מחירו, I הכנסה, ו-P_L שכר העבודה. מהמודל התיאורטי נצפה למצוא כי השפעת המחיר על הביקוש שלילית, $\alpha_1<0$, השפעת ההכנסה על הביקוש חיובית אם המוצר נורמלי, $\alpha_2>0$, השפעת המחיר על ההיצע חיובית, $\beta_1>0$, והשפעת שכר העבודה על ההיצע שלילית, $\beta_2<0$. האקונומטריקה אומדת את ערכם המספרי של פרמטרים אלו.

1.3. הידע הנדרש בסטטיסטיקה ובאלגברה

חלק זה מסכם את הידע המקדים בסטטיסטיקה ואלגברה הנדרש להתמודדות מוצלחת עם החומר. הידע הסטטיסטי מסתכם בהבנת מושגי התוחלת, השונות, והשונות המשותפת. מבחינת האלגברה יש לפתח מיומנות בשימוש בסימן הסכימה (Σ).

1.3.1. סטטיסטיקה

תוחלת: יהי X משתנה מקרי בעל פונקצית צפיפות $f(X)$. $f(X)$ מקיימת: $f(X)\geq 0$ לכל X, וכן $\int_{-\infty}^{\infty} f(X)=1$. התוחלת של X, $E(X)$, נתונה על ידי:

$$E(X)\equiv\int_{-\infty}^{\infty} Xf(X)dX$$

אינטואיטיבית, ניתן לחשוב על התוחלת כמייצגת את ערכו הממוצע של X באוכלוסיה שכן היא מחושבת כסכום (או אינטגראל, במקרה הרציף) משוקלל של כל ערכיו האפשריים של המשתנה המקרי. המשקולות מייצגות את מידת הסבירות לצפות בכל ערך של X, ככל שסבירות זו גבוהה יותר המשקל גדול יותר.

תכונה: יהיו a ו-b קבועים (כלומר a ו-b אינם מקריים). תוחלתו של המשתנה המקרי $a+bX$ נתונה על ידי:

$$E(a+bX)=a+bE(X)$$

הוכחה: מהגדרת התוחלת:

$$E(a+bX)=\int_{-\infty}^{\infty}(a+bX)f(X)dX$$

נסדר מחדש ונקבל:

$$E(a+bX)=\int_{-\infty}^{\infty}[af(X)+bXf(X)]dX=a\int_{-\infty}^{\infty}f(X)dX+b\int_{-\infty}^{\infty}Xf(X)dX$$

אך $\int_{-\infty}^{\infty} f(X)=1$, ומהגדרת התוחלת $\int_{-\infty}^{\infty} Xf(X)dX=E(X)$, לכן:

$$E(a+bX)=a+bE(X)$$

■

שונות: השונות של X, $Var(X)$, נתונה על ידי:

$$Var(X) \equiv E[X - E(X)]^2$$

השונות היא מדד למידת הפיזור של משתנים מקריים, ככל שהשונות גדולה יותר מידת הפיזור גבוהה יותר. מדידת הפיזור מתבצעת באמצעות ממוצע **ריבוע** המרחק של המשתנה מתוחלתו. הסיבה לשימוש בריבוע המרחק היא שבלעדיו סטיות חיוביות מהתוחלת יתקזזו עם סטיות שליליות ולכן מתוקף הגדרת התוחלת נקבל תמיד כי $E[X - E(X)] = 0$. בכדי להימנע מבעיה זו כל סטיה מועלית בריבוע כך שכולן מקבלות ערכים חיוביים והן אינן מקזזות זו את או.

תכונה: יהיו a ו-b קבועים (כלומר a ו-b אינם מקריים). שונותו של המשתנה המקרי $a+bX$ נתונה על ידי:

$$Var(a + bX) = b^2 Var(X)$$

הוכחה: מהגדרת השונות:

$$Var(a + bX) = E[a + bX - E(a + bX)]^2$$

נשתמש בתכונת התוחלת שהוצגה לעיל ונסדר מחדש לקבלת:

$$Var(a + bX) = E[a + bX - a - bE(X)]^2 = E\{b^2[X - E(X)]\}^2 = b^2 E[X - E(X)]^2$$

כעת קל לראות כי משימוש בהגדרת השונות מתקבל:

$$Var(a + bX) = b^2 Var(X)$$

■

שונות משותפת: יהיו X ו-Y משתנים מקריים. שונותם המשותפת, $Cov(X,Y)$, נתונה על ידי:

$$Cov(X,Y) \equiv E[X - E(X)][Y - E(Y)]$$

השונות המשותפת מודדת את פיזורם של שני משתנים מקריים זה ביחס לזה. בדרך כלל לא נתעניין בערכה של השונות המשותפת אלא בסימנה. סימן חיובי מעיד על כך שכאשר X מצוי מעל לתוחלתו גם Y נוטה לקבל ערך הגבוה מתוחלתו. במצב זה נאמר כי המשתנים מתואמים חיובית כך שכאשר X גדל גם Y נוטה לגדול. שונות משותפת שלילית מעידה על כך שכאשר X גדל Y נוטה לקטון, ובמצב זה נאמר כי המשתנים מתואמים שלילית. כאשר השונות המשותפת היא אפס נאמר כי המשתנים אינם מתואמים.

תכונה: יהיו X ו-Y משתנים מקריים. יהיו a, b, c, ו-d קבועים. שונותם המשותפת של המשתנים המקריים $a+bX$ ו-$c+dY$ נתונה על ידי:

$$Cov(a + bX, c + dY) = bdCov(X,Y)$$

הוכחה: מהגדרת השונות המשותפת:

$$Cov(a + bX, c + dY) = E[a + bX - E(a + bx)][c + dY - E(c + dY)]$$

נשתמש בתכונת התוחלת ונסדר מחדש לקבלת:

$$Cov(a + bX, c + dY) = E\{b[X - E(x)]\}\{d[Y - E(Y)]\} = bdE[X - E(X)][Y - E(Y)]$$

כעת קל לראות כי משימוש בהגדרת השונות המשותפת מתקבל:

$$Cov(a+bX, c+dY) = bdCov(X,Y)$$

■

1.3.2. שימוש בסימן הסכימה - Σ (סיגמה)

השימוש בסימן הסכימה, Σ, נועד להפוך את כתיבת סכומים של מספר רב של איברים לפשוטה וקצרה. נניח כי ברצוננו לסכום את N האיברים $X_1, X_2,...,X_N$, דרך אחת לכתיבת הסכום היא פשוט:

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_N$$

דרך זו מסורבלת לכתיבה במיוחד אם המשתנה הנסכם מורכב יותר ויש להציגו כפונקציה של מספר משתנים. דרך יעילה יותר לכתיבת הסכום היא באמצעות שימוש בסימן ה-Σ, במקרה זה הסכום יכתב כך:

$$\sum_{i=1}^{N} X_i$$

אינדקס הסכימה, i, מציין שהסכום כולל את כל ה-X-ים מ-X_1 ועד X_N. דוגמא פשוטה לשימוש בסימן הסכימה היא חישוב ממוצע ה-X-ים, שכן הממוצע סוכם את האיברים ואז מחלק את התוצאה במספרים. נסמן את הממוצע ב- $\overline{X}$. נוסחת הממוצע תכתב כך:

$$\overline{X} \equiv \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$$

תכונות

יש לחשוב על סימן הסכום כעל סוגריים אשר בתוכן נכתב סכום איברים. כל גורם משותף שניתן להוציא אל מחוץ לסוגריים ניתן גם להוציא אל מחוץ לסימן הסכימה.

תכונה: $\sum_{i=1}^{N} bX_i = b\sum_{i=1}^{N} X_i$.

הוכחה: מהגדרת הסכום:

$$\sum_{i=1}^{N} bX_i = (bX_1 + bX_2 + \ldots + bX_N)$$

נוציא את b כגורם משותף:

$$\sum_{i=1}^{N} bX_i = b(X_1 + X_2 + \ldots + X_N)$$

ולכן אנו מקבלים:

$$\sum_{i=1}^{N} bX_i = b\sum_{i=1}^{N} X_i$$

■

בחישוב שלעיל ל-b אין אינדקס סכימה, לכן הוא קבוע בכל התצפיות (1 עד N) וניתן להוציאו אל מחוץ לסימן הסכום.

תכונה: $\sum_{i=1}^{N} a = Na$.

הוכחה: מהגדרת הסכום:

$$\sum_{i=1}^{N} a = a + a + \ldots + a$$

ולכן:

$$\sum_{i=1}^{N} a = Na$$

■

במקרה זה הגורם הנסכם, a, הוא קבוע בכל N התצפיות, ולכן הסכום שווה ל-N פעמים a.

תכונה: $\sum_{i=1}^{N} (X_i - \overline{X}) = 0$, כאשר $\overline{X}$ הוא ממוצע ה-X-ים.

הוכחה: מהגדרת הסכום:

$$\sum_{i=1}^{N} (X_i - \overline{X}) = (X_1 - \overline{X}) + (X_2 - \overline{X}) + \ldots + (X_N - \overline{X})$$

נכנס איברים:

$$\sum_{i=1}^{N} (X_i - \overline{X}) = \sum_{i=1}^{N} X_i - N\overline{X} = \sum_{i=1}^{N} X_i - N\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$$

כאשר סימן השוויון השני נובע מהגדרת הסכום. כעת קל לראות כי:

$$\sum_{i=1}^{N} (X_i - \overline{X}) = \sum_{i=1}^{N} X_i - \sum_{i=1}^{N} X_i = 0$$

■

במילים, תכונה זו ממחישה כי סכום הסטיות מהממוצע שווה אפס. תוצאה זו צריכה להיות אינטואיטיבית כיוון שהממוצע מהגדרתו נקבע כך שמרחקיו מערכים הגדולים ממנו יתקזזו עם מרחקיו מערכים הקטנים ממנו.

תכונה: $\sum_{i=1}^{N} (X_i - \overline{X})^2 = \sum_{i=1}^{N} X_i^{\,2} - N\overline{X}^2$.

הוכחה: נעלה בריבוע:

$$\sum_{i=1}^{N} (X_i - \overline{X})^2 = \sum_{i=1}^{N} (X_i^{\,2} - 2X_i\overline{X} + \overline{X}^2)$$

כעת נפרק את הסכום לשלושה סכומים נפרדים:

$$\sum_{i=1}^{N} (X_i - \overline{X})^2 = \sum_{i=1}^{N} X_i^{\,2} - \sum_{i=1}^{N} 2X_i\overline{X} + \sum_{i=1}^{N} \overline{X}^2$$

נשתמש בשתי תכונות הסכום הראשונות בכדי לקבל:

$$\sum_{i=1}^{N} (X_i - \overline{X})^2 = \sum_{i=1}^{N} X_i^{\,2} - 2\overline{X}\sum_{i=1}^{N} X_i + N\overline{X}^2$$

נציב $\sum_{i=1}^{N} X_i = N\overline{X}$, ונקבל:

$$\sum_{i=1}^{N} (X_i - \overline{X})^2 = \sum_{i=1}^{N} X_i^{\,2} - 2\overline{X}N\overline{X} + N\overline{X}^2 = \sum_{i=1}^{N} X_i^{\,2} - N\overline{X}$$

■

1.4. תרגילים

1. השתמשו בהגדרות התוחלת השונות והשונות המשותפת ובתכונותיהם על מנת להוכיח כי:

$$E[X-E(X)]=0$$

$$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

שימו לב כי למרות ש-X ו-Y הם משתנים מקריים תוחלתם, $E(X)$ ו-$E(Y)$, קבועה ואיננה מקרית.

2. השתמשו בחוקי הסכימה על מנת להוכיח כי:

$$\sum_{i=1}^{N}(a+bX_i)=Na+b\sum_{i=1}^{N}X_i$$

$$\sum_{i=1}^{N}(X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y})=\sum_{i=1}^{N}(X_i-\overline{X})Y_i$$

$$\sum_{i=1}^{N}(X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y})=\sum_{i=1}^{N}X_i(Y_i-\overline{Y})$$

$$\sum_{i=1}^{N}(X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y})=\sum_{i=1}^{N}X_iY_i-N\overline{X}\overline{Y}$$