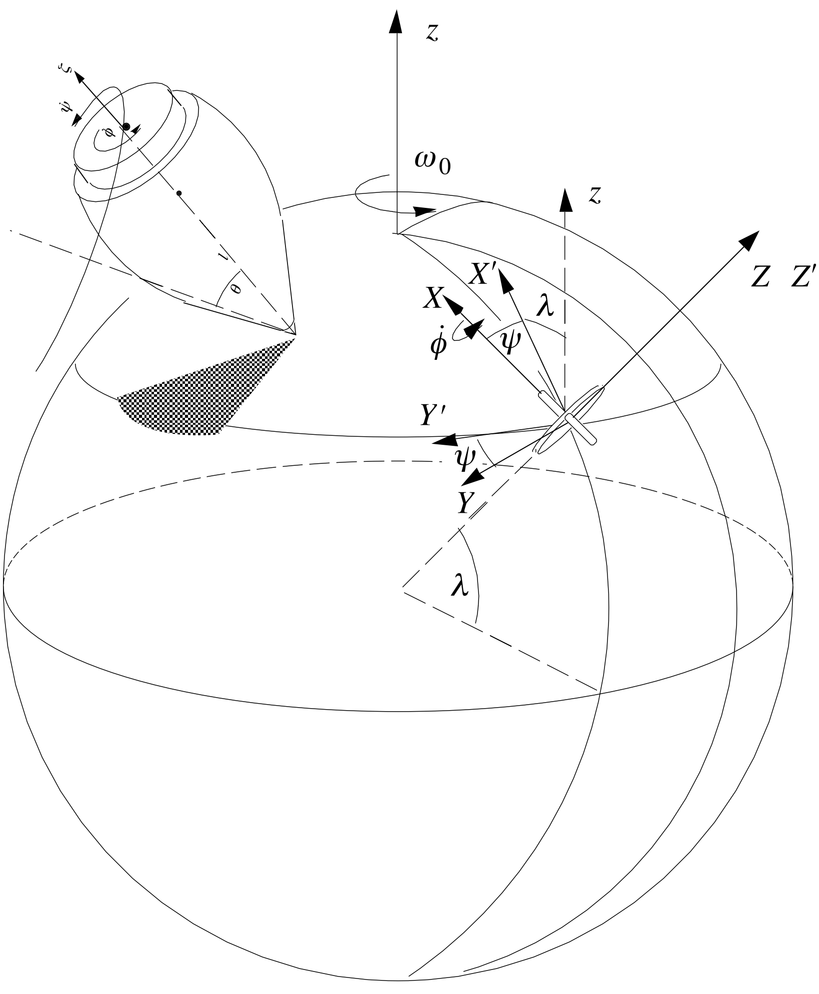
דינמיקה

של חלקיקים וגופים קשיחים

ראובן שגב



מהדורה שלישית מתוקנת,

2002

דינמיקה
של חלקיקים וגופים קשיחים

ספר לימוד לסטודנטים בלימודי הנדסה

ראובן שגב

מרכז פרלסטון למחקרים בהנדסה אוירונאוטית
המחלקה להנדסת מכונות
אוניברסיטת בן-גוריון בנגב

הספר מוקדש למורי:

מרים צבירן
מאיר שילדר
משה זילברמן

תוכן העניינים

			עמוד
		הקדמה	
		סימנים	1
פרק 1		**קינמטיקה של חלקיק**	4
	1.0	מבוא	4
	1.1	תנועת חלקיק, מהירות ותאוצה	4
	1.2	תאור תנועה בקואורדינטות קרטזיות	5
	1.3	תאור תנועה דו-מימדית בקואורדינטות פולריות	7
	1.4	תאור תנועה בקואורדינטות מסלול	13
פרק 2		**קינטיקה של חלקיק**	23
	2.0	מבוא	23
	2.1	תנע קווי ותנע זוויתי של חלקיק	23
	2.2	חוקי התנועה של ניוטון	23
	2.3	עבודה ואנרגיה	40
פרק 3		**דינמיקה של מערכת חלקיקים**	48
	3.0	מבוא	48
	3.1	הגדרות והנחות יסוד	48
	3.2	משוואות התנועה של מערכת חלקיקים	54
	3.3	עבודה ואנרגיה במערכת חלקיקים	63
פרק 4		**קינמטיקה של גוף קשיח**	67
	4.0	מבוא	67
	4.1	גופים קשיחים ומצביהם במרחב	67
	4.2	מהירויות בתנועת גוף קשיח	82
	4.3	תאוצות בתנועת גוף קשיח	101
	4.4	תנועה יחסית של גופים קשיחים	113
פרק 5		**קינטיקה של גוף קשיח**	119
	5.0	מבוא	119
	5.1	טנסור ההתמדה ושימושיו	121
	5.2	אנרגיה קינטית של גוף קשיח	134
	5.3	משוואות התנועה של גוף קשיח	139
מפתח העניינים			158

הקדמה

ספר זה מיועד לתלמידי המחלקות השונות ללמודי הנדסה באוניברסיטאות אשר לומדים, בדרך כלל בשנה השניה ללמודים, קורס בדינמיקה. הרקע הנדרש מהסטודנטים על מנת להשתמש בספר בצורה יעילה תואם את הרמה של התלמיד בשלב זה של למודיו, כלומר: ידיעת הפעולות הבסיסיות באלגברה של וקטורים ומטריצות, קלקולוס ברמה הנהוגה במחלקות להנדסה בשנה הראשונה וקורס בסטטיקה.

מנסיוני, אין כמעט אפשרות להספיק את החומר אם הגישה היא ללמד ראשית את המקרה הדו-מימדי ורק לאחר מכן מציגים את המקרה הכללי התלת-מימדי. מסיבה זו מוצגים המושגים באופן הכללי התלת-מימדי והמקרה הדו-מימדי מוצג כמקרה פרטי.

כל פרק בספר מחולק לסעיפים. הסעיפים מסומנים באמצעות שלש ספרות וכל סעיף מציג מושג אחד בלבד, תוצאה אחת או דוגמה אחת. מסיבה זו אין בספר מספור של הנוסחאות. נוסחה שנתקבלה היא, כמו כל תוצאה אחרת, חלק בלתי נפרד מהנושא של הסעיף בו היא מופיעה. ההתייחסות בהמשך הטקסט היא אל הנושא בו עוסק הסעיף ולא אל הנוסחה. רצוי שבלימוד או בחזרה על החומר יוודא התלמיד שהנושא של כל סעיף ברור לו.

ניסיתי כמיטב יכולתי להסביר בהצגת החומר התיאורטי ובפתרון הדוגמאות את הנקודות הקשות להבנה ולמנוע את הטעויות השכיחות בהן נתקלתי.

ראובן שגב

סימנים

כללי הסימון

סקלרים:

משתנים סקלריים מסומנים על ידי אותיות נטויות לדוגמה: a, β, v, v_x, f_y .

וקטורים:

וקטורים מסומנים על ידי אותיות עבות זקופות לדוגמה: $\mathbf{a}, \boldsymbol{\beta}, \mathbf{v}, \mathbf{F}$.

גודלו של וקטור מסומן על ידי אות זהה לזו המסמנת את הוקטור הכתובה באופן נטוי או על ידי כתיבת קוים אנכיים משני צידי סימן הוקטור.

לדוגמה: v או $|\mathbf{v}|$ מסמנים את גודל הוקטור $\mathbf{v}$.

וקטורי היחידה בכיוון הצירים x, y, z של מערכת צירים אורתוגונלית יסומנו על ידי $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ בהתאמה.

רכיבי וקטורים במערכת הצירים x, y, z יצוינו באמצעות מציינים תחתיים. לדוגמה:

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} .$$

מציינים תחתיים n, t, r, θ מציינים רכיבים בכיוונים ההיקפי, הרדיאלי, המשיקי והנורמלי בהתאמה.

וקטור יחידה בכיוון הוקטור $\mathbf{v}$ יסומן על ידי $\hat{\mathbf{v}}$, כלומר, $\mathbf{v} = v\,\hat{\mathbf{v}}$.

וקטור העמודה המכיל את רכיביו של וקטור יסומן על ידי הוספת סוגריים מתולתלים משני צידיו של סימן הוקטור, לדוגמה:

$$\{v\} = \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix}.$$

העתקות ליניאריות:

העתקות ליניאריות מסומנות על ידי אותיות לטיניות גדולות, זקופות ודקות כגון: A, B, I, P, Q, R .

המטריצה של העתקה ליניארית ביחס לבסיס $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ תסומן על ידי סוגריים מרובעים שמקיפים את סימן המטריצה, ואברי המטריצה יסומנו על ידי מציינים תחתיים. לדוגמה:

$$[\mathsf{A}] = \begin{bmatrix} \mathsf{A}_{xx} & \mathsf{A}_{xy} & \mathsf{A}_{xz} \\ \mathsf{A}_{yx} & \mathsf{A}_{yy} & \mathsf{A}_{yz} \\ \mathsf{A}_{zx} & \mathsf{A}_{zy} & \mathsf{A}_{zz} \end{bmatrix} .$$

פעולת ההעתקה הליניארית A על הוקטור $\mathbf{u}$ תסומן על ידי $\mathsf{A}(\mathbf{u})$.

רשימת סימנים:

A	שטח, ראשית הצירים של מערכת צירים הצמודה לגוף קשיח
A	העתקת הסיבוב של גוף קשיח (קוסינוסי הזויות)
$\mathbf{a}$	תאוצה
c	מרכז המסה, משמש בעיקר כמציין תחתי לסמן גודל יחסית למרכז המסה
$\mathbf{f}$, $\mathbf{F}$	כוח
$\mathbf{f}_i$	הכוח החיצוני הפועל על החלקיק ה-i במערכת חלקיקים
$\mathbf{f}_{ij}$	הכוח שהחלקיק ה-j מפעיל על החלקיק ה- i במערכת חלקיקים
$\mathbf{H}$	תנע זוויתי
I , $[\mathsf{I}]$	טנסור ההתמדה והמטריצה שלו
$\mathbf{I}_0,\mathbf{J}_0,\mathbf{K}_0$	וקטורי בסיס אליהם מתייחס הגוף הקשיח במצב היחוס שלו
$\mathbf{I},\mathbf{J},\mathbf{K}$	וקטורי הבסיס הצמודים לגוף הקשיח במשך תנועתו
$\mathbf{M}$	מומנט יחסית לראשית
$\mathbf{M}_A$	מומנט יחסית לנקודה A
$\mathbf{n}$	וקטור יחידה ניצב, הנורמל לעקום במרחב
$\mathbf{p}$	תנע קווי
P	הספק
r	הרדיוס בקואורדינטות פולריות
$\mathbf{r}$	רדיוס וקטור אל מקום נקודה במרחב
$\mathbf{r}_c$	רדיוס וקטור אל מרכז המסה
$\mathbf{r}_A$	רדיוס וקטור אל מקום הראשית של המערכת הצמודה לגוף קשיח
$\mathbf{r}_i$	רדיוס וקטור אל מקום החלקיק ה-i במערכת חלקיקים
$\mathbf{r}'_i$	רדיוס וקטור ממרכז המסה אל החלקיק ה-i במערכת חלקיקים
$\mathbf{R}$	רדיוס וקטור יחסית לראשית של המערכת הצמודה לגוף הקשיח
$\mathbf{R}_0$	רדיוס וקטור לנקודה במצב היחוס של גוף קשיח
s	פרמטר אורך העקומה על עקומה במרחב
t	זמן
$\mathbf{t}$	וקטור היחידה המשיק לעקומה במרחב
T	אנרגיה קינטית
U	אנרגיה פוטנציאלית
$\mathbf{v}$	מהירות

W	עבודה
X,Y,Z	צירי המערכת הצמודה לגוף הקשיח, קואורדינטות של נקודה יחסית לצירים אלו
X_0,Y_0,Z_0	צירי המערכת אליה מתיחס הגוף במצב היחוס, קואורדינטות של נקודה יחסית לצירים אלו
κ	עקמומיות של עקומה
θ	קואורדינטת הזווית בקואורדינטות פולריות
$\hat{\boldsymbol{\theta}}$	וקטור יחידה בכיוון ההיקפי בקואורדינטות פולריות
ρ	רדיוס העקמומיות
ψ,θ,ϕ	זויות אוילר
$\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\Omega}$	מהירות זוויתית
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$	מכפלה סקלרית של הוקטורים $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$
$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$	מכפלה וקטורית של הוקטורים $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$
$\dot{f}$	הנגזרת לפי הזמן של הפונקציה f (התלויה בזמן)
$f\,'$	הנגזרת של הפונקציה f התלויה במשתנה אחד
$\dot{\mathbf{u}}_{XYZ}$	קצב השינוי של הוקטור $\mathbf{u}$ יחסית לצירי מערכת הצמודה לגוף הקשיח
$\dot{\mathbf{u}}_{X'Y'Z'}$	קצב השינוי של הוקטור $\mathbf{u}$ יחסית לצירי מערכת X', Y', Z'

פרק 1: קינמטיקה של חלקיק

1.0 מבוא

1.0.1 קינמטיקה וקינטיקה

קינמטיקה הוא שמו של אותו חלק של המכניקה העוסק בחקר תנועה נתונה. בקינמטיקה, תהא זו הקינמטיקה של חלקיק או גוף קשיח, אנו עוסקים בתאור מתמטי של התנועה, במהירות, בתאוצה ובתכונותיהם. לכן, המושגים של מסה וכוח אינם מוזכרים בפרק הקינמטיקה. במיסגרת הסטטיקה נלמדים מושגי הכוח המומנט ותכונותיהם. ה***קינטיקה*** עוסקת בקשר בין כוח ומומנט, לתנועה. לצורך כך מוצגים מושגי המסה, התנע והאנרגיה. בכותרת הכללית של דינמיקה ניכללות הקינמטיקה והקינטיקה.

1.0.2 הקדמה

בפרק זה נעסוק בתאור התנועה, או בקינמטיקה, של חלקיק. ראשית נגדיר את המסלול, המהירות והתאוצה ולאחר מכן נראה דרכים שונות לחישובם. נראה את חישוב רכיבי התאוצה כאשר אנו מתייחסים לקואורדינטות פולריות וקואורדינטות המסלול. מבחינה מתמטית הפרק עוסק בפונקציה וקטורית של משתנה אחד, או תאור עקומה פרמטרית במרחב.

1.1 תנועת חלקיק, מהירות ותאוצה

1.1.1 מסלול התנועה

תנועת חלקיק מתוארת על ידי תאור מקומו של החלקיק בכל זמן וזמן במרחב הפיזיקלי. עבורנו, המרחב הפיזיקלי מיוצג באופן מתמטי על ידי המרחב האוקלידי התלת-מימדי. כאשר אנו בוחרים ראשית, ניתן ליצג כל נקודה במרחב באמצעות רדיוס וקטור $\mathbf{r}$ מהראשית אל אותה נקודה. לכן, תאור תנועת חלקיק נעשה באמצעות הפונקציה

$$\boxed{\mathbf{r} = \mathbf{r}(t),}$$

שמציינת עבור כל זמן t את מקומו של החלקיק. רצוי לציין בהקשר זה, שאין לנו כל בטחון בכך, שהראשית שבחרנו, נמצאת באותו מקום בזמנים שונים. לדוגמה, אם אנו בוחרים נקודה על פני כדור הארץ כראשית, תנועת כדור הארץ גורמת לכך שהראשית שבחרנו אינה במקום קבוע. ככלל, כל חישובי התנועה שאנו עושים מתיחסים לראשית שבחרנו. בבעיה זו נמשיך לדון בפרק העוסק בקינטיקה של חלקיק.

1.1.2 מהירות

מהירות של חלקיק בזמן t היא הנגזרת, בזמן t, של הפונקציה המתארת את המסלול. כלומר, אם נסמן על ידי $\mathbf{v}(t)$ את מהירות החלקיק בזמן t, אזי

$$\boxed{\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t).}$$

1.1.3 תאוצה

תאוצת חלקיק בזמן t היא הנגזרת בזמן t של הפונקציה $\mathbf{v}(t)$ המתארת את תלות וקטור המהירות בזמן. כלומר, אם נסמן על ידי $\mathbf{a}(t)$ את תאוצת החלקיק בזמן t , אזי

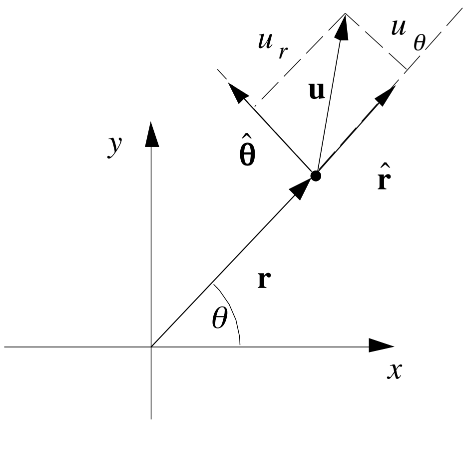
$$\boxed{\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t)\ .}$$

1.2 תאור תנועה בקואורדינטות קרטזיות

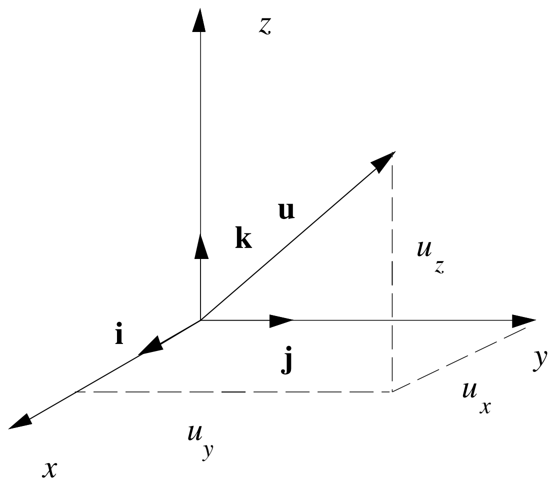
1.2.1 תאור וקטורים על ידי רכיביהם במערכת קרטזית

תאור מופשט של וקטורים כמו זה המצוין בסעיף הקודם אינו מעשי משום שאינו מאפשר מדידה כמותית של הוקטורים בשימוש במספרים וביחידות מדידה. תאור כמותי של וקטורים מתאפשר כאשר אנו בוחרים בנוסף לראשית גם מערכת צירים אורתוגונלית ימנית דרך הראשית כמתואר בתרשים 1. כפי שמתואר בתרשים אנו נבטא וקטור כלשהו $\mathbf{u}$ באמצעות רכיביו ווקטורי הבסיס $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ בצורה

$$\mathbf{u} = u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} + u_z\mathbf{k}\ .$$



תרשים 2



תרשים 1

1.2.2 תאור המסלול, המהירות והתאוצה בקואורדינטות קרטזיות

כמו כל וקטור אחר ניתן לתאר את וקטורי המקום, המהירות והתאוצה באמצעות רכיביהם כאשר התנועה מתבטאת בכך שרכיבי וקטורים אלו תלויים בזמן.

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$
$$\mathbf{v}(t) = v_x(t)\mathbf{i} + v_y(t)\mathbf{j} + v_z(t)\mathbf{k}$$
$$\mathbf{a}(t) = a_x(t)\mathbf{i} + a_y(t)\mathbf{j} + a_z(t)\mathbf{k} \,.$$

מכיון שהוקטורים **i, j, k** קבועים, נובע מההגדרות בסעיפים 1.1.2, 1.1.3 שרכיבי המהירות והתאוצה מתקבלים על ידי גזירת הרכיבים המתאימים של וקטור המקום. כלומר,

$$\boxed{\begin{array}{c} v_x = \dot{x} \quad v_y = \dot{y} \quad v_z = \dot{z} \\ a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} \quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y} \quad a_z = \dot{v}_z = \ddot{z} \,. \end{array}}$$

דוגמה 1.2.3

תנועת חלקיק נתונה על ידי המשוואה

$$\mathbf{r} = c\cos t\mathbf{i} + c\sin t\mathbf{j} + bt\mathbf{k} \,.$$

דרוש לחשב: א) את מרחק החלקיק מהראשית בכל רגע,
ב) את וקטור המהירות ואת גודלו בכל רגע,
ג) את וקטור התאוצה ואת גודלו בכל רגע.

פתרון: א)

$$r = \sqrt{c^2\cos^2 t + c^2\sin^2 t + b^2t^2}$$
$$= \sqrt{c^2 + b^2t^2} \,.$$

אנו שמים לב שההיטל של מסלול החלקיק על המישור x,y הוא מעגל ברדיוס c.

ב)

$$\mathbf{v} = -c\sin t\mathbf{i} + c\cos t\mathbf{j} + b\mathbf{k}$$
$$v = \sqrt{c^2\sin^2 t + c^2\cos^2 t + b^2}$$
$$= \sqrt{c^2 + b^2} \,.$$

ג)

$$\mathbf{a} = -c\cos t\mathbf{i} - c\sin t\mathbf{j}$$
$$a = \sqrt{c^2\cos^2 t + c^2\sin^2 t}$$
$$= c \,.$$

דוגמה 1.2.4

הראה שתנועה שוות תאוצה של חלקיק הינה מישורית.

פתרון: נסמן את התאוצה הקבועה של החלקיק על ידי

$$\mathbf{a}_0 = a_{0x}\mathbf{i} + a_{0y}\mathbf{j} + a_{0z}\mathbf{k} \,,$$

ואת המהירות והמקום של החלקיק בזמן $t = 0$ נסמן על ידי

$$\mathbf{v}_0 = v_{0x}\mathbf{i} + v_{0y}\mathbf{j} + v_{0z}\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k} \,.$$

על ידי שימוש באינטגרציה פעמיים עבור כל אחד מרכיבי התנועה והצבת תנאי ההתחלה נקבל

$$x = x_0 + v_{0x}t + \tfrac{1}{2}a_{0x}t^2$$
$$y = y_0 + v_{0y}t + \tfrac{1}{2}a_{0y}t^2$$
$$z = z_0 + v_{0z}t + \tfrac{1}{2}a_{0z}t^2 \,.$$

כלומר,

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\mathbf{a}_0 t^2 \,.$$

ממשוואה זו נובע כי הוקטור $\mathbf{r}$ - $\mathbf{r}_0$, המציין את מקום החלקיק יחסית למקומו ההתחלתי, הינו קומבינציה ליניארית של הוקטורים $\mathbf{v}_0$ ו- $\mathbf{a}_0$ (עם המקדמים t ו- t^2 בהתאמה). לפיכך, הוא חייב להמצא במישור ששני הוקטורים, וקטור התאוצה הקבועה ווקטור המהירות ההתחלתית, יוצרים. אנו גם שמים לב לעובדה שוקטור המהירות מקיים $\mathbf{v} - \mathbf{v}_0 = \mathbf{a}_0 t$, ולכן, הוקטור המציין את השינוי במהירות נמצא לאורך קו ישר המקביל לוקטור התאוצה הקבועה.

1.3 תאור תנועה דו-מימדית בקואורדינטות פולריות

1.3.1 וקטורי הבסיס בקואורדינטות פולריות

לעיתים, נוח לתאר תנועה מישורית בקואורדינטות פולריות או תנועה מרחבית בקואורדינטות צילידריות. מכיון שקואורדינטות צילינדריות הן למעשה קואורדינטות פולריות בצרוף ציר z בניצב למישור, לימוד השימוש בקואורדינטות פולריות לתאור התנועה, יאפשר תאור תנועה באמצעות קואורדינטות צילינדריות במרחב.

בתרשים 2 מצוינים הגדלים והוקטורים המשמשים אותנו בתאור התנועה באופן פולרי. וקטור היחידה $\hat{\mathbf{r}}$ הוא כמובן וקטור יחידה בכיוון וקטור המקום $\mathbf{r}$, וקטור היחידה $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ מתקבל על ידי סיבובו של $\hat{\mathbf{r}}$ ב-$90°$ נגד מגמת השעון. נתבונן בוקטור $\mathbf{u}$ היוצא מהנקודה אליה מצביע הוקטור $\mathbf{r}$. אנו נקרא לרכיב של הוקטור $\mathbf{u}$ בכיוון $\hat{\mathbf{r}}$ הרכיב הרדיאלי של $\mathbf{u}$ ונסמן אותו על ידי u_r ואילו הרכיב של $\mathbf{u}$ בכיוון $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ יסומן על ידי u_θ ויקרא הרכיב ההיקפי של $\mathbf{u}$. אנו יכולים לכתוב אם כן

$$\mathbf{u} = u_r\hat{\mathbf{r}} + u_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} \,.$$

מכיון ש-$\hat{\mathbf{r}}$ הוא וקטור באורך יחידה המוטה בזווית θ לציר x , רכיביו על הצירים x ו- y הם $\cos\theta$ ו- $\sin\theta$ בהתאמה. כמו-כן, $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ הוא וקטור באורך יחידה המוטה בזווית של θ לציר y ורכיביו על הצירים x ו- y הם $-\sin\theta$ ו- $\cos\theta$ בהתאמה. ניתן לכתוב לכן

$$\hat{\mathbf{r}} = \cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}$$
$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j} \,.$$

אנו רואים שבניגוד לוקטורי היחידה במערכת צירים קרטזית, וקטורי היחידה במערכת פולרית אינם קבועים אלא תלויים במקום דרך הזווית θ. על ידי חישוב הנגזרת של וקטורים אלו לפי המשתנה θ נקבל

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d\theta} = -\sin\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j}$$

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{d\theta} = -\cos\theta\,\mathbf{i} - \sin\theta\,\mathbf{j},$$

ובהשוואה אם הביטויים עבור וקטורי הבסיס

$$\boxed{\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad \frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{d\theta} = -\hat{\mathbf{r}}.}$$

1.3.2 תאור המסלול בקואורדינטות פולריות

בתאור המסלול של תנועת חלקיק במישור, שתי הקואורדינטות, r ו- θ, תלויות בזמן. מכיון ש- $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$, אנו יכולים לכתוב

$$\mathbf{r}(t) = r(t)\hat{\mathbf{r}}(\theta(t)).$$

1.3.3 מהירות בקואורדינטות פולריות

על ידי גזירה לפי הזמן של הביטוי עבור המסלול של החלקיק המופיע בסעיף הקודם, אנו מקבלים

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \frac{d\mathbf{r}}{dt}\\ &= \frac{dr}{dt}\hat{\mathbf{r}} + r\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}\\ &= \frac{dr}{dt}\hat{\mathbf{r}} + r\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt},\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{v} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}.}$$

בשורה השניה השתמשנו בכלל הגזירה עבור מכפלה של שתי פונקציות, בשורה השלישית השתמשנו בכלל השרשרת לנגזרת של פונקציה מורכבת ובשורה הרביעית השתמשנו בתוצאות סעיף 1.3.1. כלומר, אנו יכולים לכתוב עבור הרכיבים הרדיאלי וההיקפי של וקטור המהירות

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r\dot{\theta}.$$

1.3.4 תאוצה בקואורדינטות פולריות

כאשר אנו גוזרים את הביטוי עבור המהירות אנו מקבלים

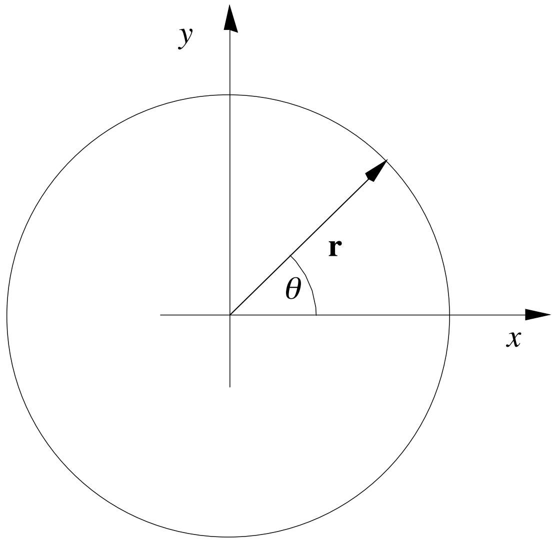
$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} \\
&= \frac{d\dot{r}}{dt}\hat{\mathbf{r}} + \dot{r}\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} + \frac{dr}{dt}\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\frac{d\dot{\theta}}{dt}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\dot{\theta}\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt} \\
&= \ddot{r}\hat{\mathbf{r}} + \dot{r}\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\ddot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\dot{\theta}\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} \\
&= \ddot{r}\hat{\mathbf{r}} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\ddot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\dot{\theta}^2(-\hat{\mathbf{r}}) \quad .
\end{aligned}$$

כאשר שוב השתמשנו באותם כללים כמו בפיתוח הביטוי עבור המהירות - הכלל לגבי נגזרת של מכפלה, כלל השרשרת והכללים לגבי הנגזרות של וקטור היחידה בכיוון הרדיאלי ווקטור היחידה בכיוון ההיקפי. לסיכום, קיבלנו

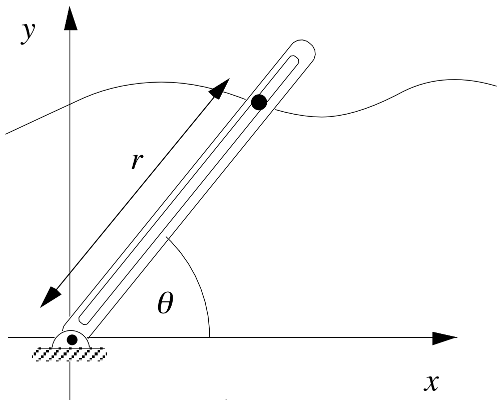
$$\boxed{\begin{gathered}\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}} \\ a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad , \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \ .\end{gathered}}$$

דוגמה 1.3.5

חלקיק סובב במישור במעגל ברדיוס $2\ \mathrm{m}$ והוא משלים 3 סיבובים בשניה. חשב את המשתנים $r(t)$, $\theta(t)$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{a}$.



תרשים 3



תרשים 4

פתרון: נבחר מערכת צירים שראשיתה נמצאת במרכז המעגל (ראה תרשים 3). מכיון שהמרחק בין החלקיק לבין הראשית קבוע ושווה לרדיוס המעגל, אנו יכולים לרשום $r(t) = 2\ \mathrm{m}$. החלקיק נע בתנועה זוויתית קצובה, כלומר $\dot{\theta}$ קבועה, ומהנתונים,

$$\dot{\theta} = \frac{2\pi \cdot 3\ \mathrm{rad}}{1\ \mathrm{s}} = 6\pi\ \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}} \ .$$

בהנחה ש- $\theta\ (t = 0) = 0$, $\theta(t) = 6\pi t\ \mathrm{rad}$. נובע מכך ש- $\ddot{\theta} = 0$, $\dot{r} = \ddot{r} = 0$, ובשימוש תוצאות הסעיפים 1.3.3, 1.3.4 מתקבל

$$\mathbf{v} = 2\cdot 6\pi\hat{\boldsymbol{\theta}} = 12\pi\hat{\boldsymbol{\theta}}\ \ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$.\ \mathbf{a} = -2\cdot(6\pi)^2\hat{\mathbf{r}} = -72\pi^2\hat{\mathbf{r}}\ \ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

אנו שמים לב להבדל בין $\ddot{r}$, שמודד את הנגזרת השניה של מרחק החלקיק מהראשית, ואשר מתאפס בדוגמה זו, לבין a_r , שהוא הרכיב של תאוצת החלקיק בכיוון הרדיאלי, ואשר בדוגמה זו הוא $-72\pi^2\ \text{m/s}^2$.

דוגמה 1.3.6

חלקיק נע לאורך מסלול המתואר במערכת קואורדינטות פולריות על ידי פונקציה נתונה $r = r(\theta)$ (ראה תרשים 4). חשב את המהירות והתאוצה של החלקיק אם הוא מאולץ להחליק לאורך מוט הסובב בהתאם למשוואה נתונה $\theta = \theta(t)$.

פתרון: בשימוש כלל השרשרת והכלל לגזירת מכפלה נקבל

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = r'\,\dot{\theta}\\ \ddot{r} &= \frac{dr'}{dt}\dot{\theta} + r'\,\ddot{\theta}\\ &= \frac{dr'}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}\dot{\theta} + r'\,\ddot{\theta}\\ &= r''\dot{\theta}^2 + r'\,\ddot{\theta} \quad .\end{aligned}$$

על ידי הצבת ביטויים אלו במשוואות עבור המהירות והתאוצה (סעיפים 1.3.3, 1.3.4) נקבל

$$\mathbf{v} = r'\,\dot{\theta}\hat{\mathbf{r}} + \dot{\theta}r\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$.\ \mathbf{a} = (r''\dot{\theta}^2 + r'\,\ddot{\theta} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}} + (2r'\,\dot{\theta}^2 + \ddot{\theta}r)\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

במקרה הפרטי שבו $\dot{\theta} = \omega$ קבועה, ביטויים אלו יהיו

$$\mathbf{v} = r'\,\omega\hat{\mathbf{r}} + \omega r\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$.\ \mathbf{a} = (r''-r)\omega^2\hat{\mathbf{r}} + 2r'\,\omega^2\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

דוגמה 1.3.7

הוכח שכאשר $a_\theta = 0$, $r^2\dot{\theta} = \text{const.}$.

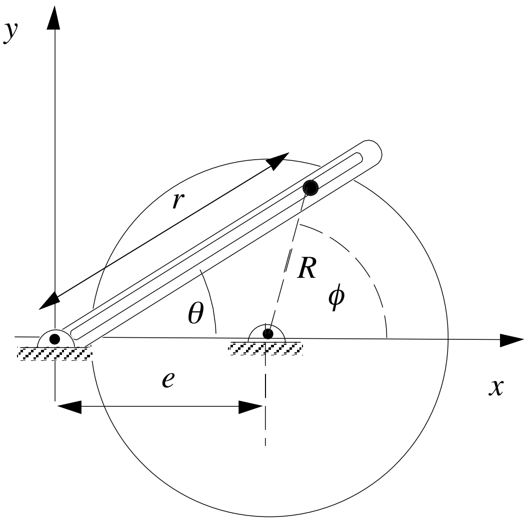
פתרון: כאשר $a_\theta = 0$, מתקבל מהמשוואה עבור a_θ , $a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0$. בהכפלת משוואה זו ב- r נקבל

$$,\ 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$$

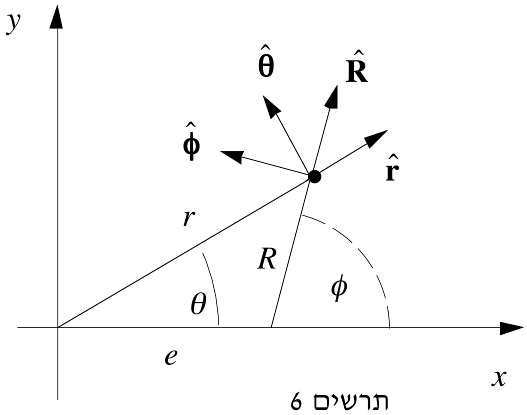
וממשוואה זו נובע: $r^2\dot{\theta} = \text{const.}$.

דוגמה 1.3.8

פין המחובר לגלגל במרחק R ממרכזו חופשי להחליק לאורך חריץ הנמצא במוט. המוט סובב סביב ציר הנמצא במרחק $e = 1.5R$ ממרכז הגלגל (ראה תרשים 5). הגלגל סובב במהירות $\dot{\phi} = \omega = \text{const.}$. דרוש למצוא את הגדלים $\dot{r}, \ddot{r}, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$ במצב בו $\phi = 45^\circ$.



תרשים 5



תרשים 6

פתרון: בתרשים 6 מוצגים הגדלים הגיאומטריים ווקטורי היחידה השונים. השלב הראשון של הפתרון הוא שלב מכין, בו נמצא את הקשר בין r ו-R , הקשר בין θ ו- ϕ , ונבטא את וקטורי היחידה המסומנים באמצעות רכיביהם במערכת הקרטזית. בשלב השני והעקרוני של הפתרון נבטא את המהירות והתאוצה של החלקיק באמצעות הגדלים הנתונים ω ו- R תוך שימוש בקואורדינטות פולריות R ו- ϕ יחסית לציר הסיבוב של הגלגל. לקבלת התוצאה הדרושה, נשווה גדלים אלו עם המהירות והתאוצה כפי שהם מחושבים בקואורדינטות הפולריות r, θ .

על סמך תרשים 6 אנו יכולים לרשום

$$\tan\theta = \frac{R\sin\phi}{R\cos\phi + e}$$

$$r = \frac{R\sin\phi}{\sin\theta}$$

$$\hat{\mathbf{R}} = \cos\phi\mathbf{i} + \sin\phi\mathbf{j}$$

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin\phi\mathbf{i} + \cos\phi\mathbf{j}$$

$$\hat{\mathbf{r}} = \cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j} .$$

בהצבת הערכים הנתונים של e ו- ϕ נקבל

$$r = 2.32R$$

$$\theta = 17.76^\circ .$$

נרשום את המהירות והתאוצה של החלקיק בשימוש הקואורדינטות הפולריות R ו- ϕ :

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} &= \dot{R}\hat{\mathbf{R}} + R\dot{\phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} \\
&= R\omega\hat{\boldsymbol{\phi}} \\
&= R\omega(-\sin\phi\mathbf{i} + \cos\phi\mathbf{j})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= (\ddot{R} - R\dot{\phi}^2)\hat{\mathbf{R}} + (R\ddot{\phi} + 2\dot{R}\dot{\phi})\hat{\boldsymbol{\phi}} \\
&= -R\omega^2\hat{\mathbf{R}} \\
&= -R\omega^2(\cos\phi\mathbf{i} + \sin\phi\mathbf{j}) .
\end{aligned}$$

מאידך, בשימוש בקואורדינטות הפולריות r, θ אנו מקבלים עבור המהירות

$$\begin{aligned}
r\dot{\theta} &= v_\theta \\
&= \mathbf{v}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}} \\
&= R\omega(\sin\phi\sin\theta + \cos\phi\cos\theta) \\
&= R\omega\cos(\phi - \theta)
\end{aligned}$$

$$\dot{\theta} = \frac{R}{r}\omega\cos(\phi - \theta) ,$$

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= v_r \\
&= \mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{r}} \\
&= R\omega(-\sin\phi\cos\theta + \cos\phi\sin\theta) \\
&= R\omega\sin(\theta - \phi) .
\end{aligned}$$

בהצבת ערכי r ו- θ נקבל

$$\begin{aligned}
\dot{r} &= -0.458R\omega \\
\dot{\theta} &= 0.383\omega .
\end{aligned}$$

עבור התאוצה מתקבל

$$\begin{aligned}
\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 &= a_r \\
&= \mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{r}} \\
&= -R\omega^2(\cos\phi\cos\theta + \sin\phi\sin\theta) \\
&= -R\omega^2\cos(\phi - \theta),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} &= a_\theta \\
&= \mathbf{a}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}} \\
&= -R\omega^2(-\cos\phi\sin\theta + \sin\phi\cos\theta) \\
&= -R\omega^2 \sin(\phi - \theta) \quad .
\end{aligned}
$$

מכאן

$$
\begin{aligned}
\ddot{r} &= r\dot{\theta}^2 - R\omega^2\cos(\phi-\theta) \\
\ddot{\theta} &= -\frac{1}{r}\left[2\dot{r}\dot{\theta} + R\omega^2\sin(\phi-\theta)\right] .
\end{aligned}
$$

ובהצבת הערכים שמצאנו עד כה נקבל

$$
\begin{aligned}
\ddot{r} &= -0.549R\omega^2 \\
\ddot{\theta} &= -0.0461\omega^2 .
\end{aligned}
$$

1.4 תאור תנועה בקואורדינטות מסלול

1.4.1 קרוב התנועה על ידי טור טיילור: התנועה המשיקה והמישור האוסקולטורי

ככל פונקציה אחרת, אנו יכולים לקרב את הפונקציה $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ המתארת את תנועת החלקיק בסביבת נקודה כלשהי על המסלול, $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$, באמצעות טור טיילור

$$
\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) = \mathbf{r}(t_0) + \dot{\mathbf{r}}(t_0)\Delta t + \ddot{\mathbf{r}}(t_0)\frac{\Delta t^2}{2} + \dddot{\mathbf{r}}(t_0)\frac{\Delta t^3}{3!} + \ldots .
$$

מביטוי זה אנו מסיקים, שבקרוב ראשון, המסלול בקרבת הנקודה $\mathbf{r}_0$ מקורב על ידי תנועה לאורך קו ישר במהירות קבועה $\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}}(t_0)$, כלומר

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) &\cong \mathbf{r}(t_0) + \dot{\mathbf{r}}(t_0)\Delta t \\
\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) &\cong \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0\Delta t .
\end{aligned}
$$

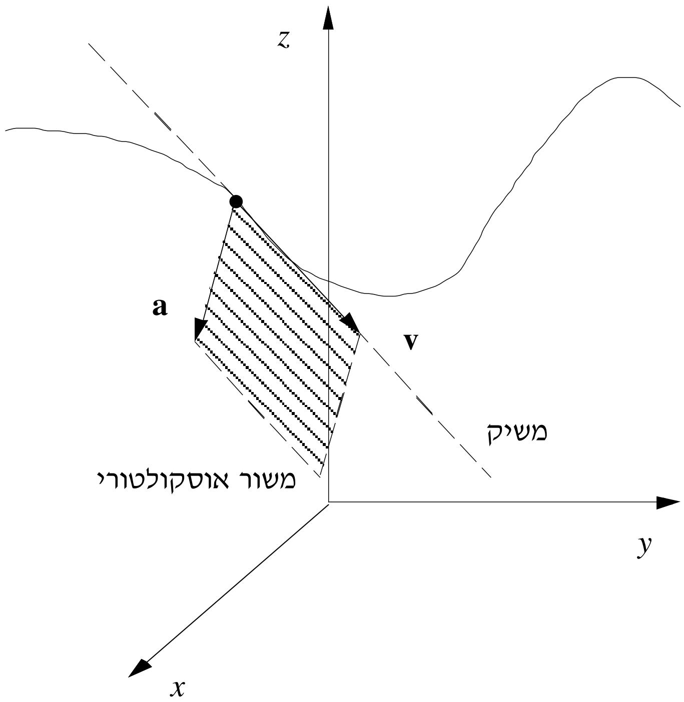
תנועה קצובה זו, המקרבת בקרוב ראשון את התנועה המקורית בסביבת הנקודה $\mathbf{r}_0$, נקראת **התנועה המשיקה** לתנועה בנקודה $\mathbf{r}_0$.

אם ברצוננו לקרב את התנועה בקרוב מסדר שני, נקבל

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) &\cong \mathbf{r}(t_0) + \dot{\mathbf{r}}(t_0)\Delta t + \ddot{\mathbf{r}}(t_0)\frac{\Delta t^2}{2} \\
\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) &\cong \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0\Delta t + \mathbf{a}_0\frac{\Delta t^2}{2} ,
\end{aligned}
$$

כלומר, תנועה בתאוצה קבועה $\mathbf{a}_0 = \ddot{\mathbf{r}}(t_0)$. מדוגמה 1.2.4 נובע, שהתנועה המקרבת את התנועה המקורית

קרוב מסדר שני, היא תנועה מישורית. המישור שבו נמצאת התנועה המקרבת בקרוב מסדר שני את התנועה המקורית בסביבת הנקודה $\mathbf{r}_0$, נקרא **המישור האוסקולטורי** של התנועה בנקודה $\mathbf{r}_0$ (ראה תרשים 7).



תרשים 7

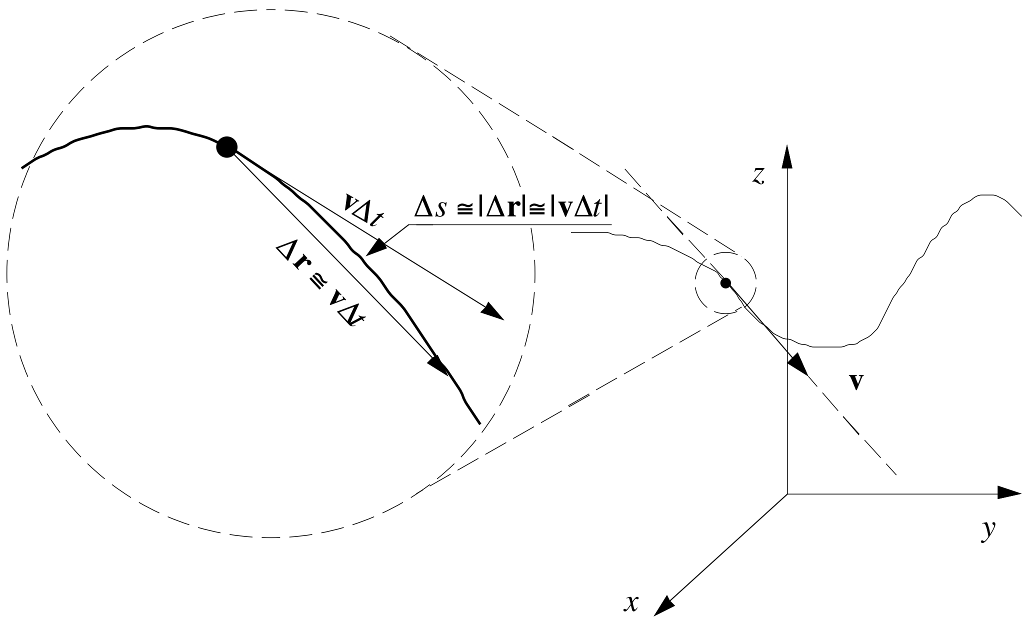
1.4.2 פרמטר אורך המסלול

נסמן על ידי הפרמטר $s = s(t)$ את אורך המסלול שמבצע החלקיק בין הזמן ההתחלתי לזמן t . בתרשים 8 אנו רואים, שעבור פרק זמן קצר Δt , ניתן לכתוב בקרוב ראשון $\Delta s \cong |\Delta\mathbf{r}| \cong |\mathbf{v}\Delta t|$. ביתר דיוק, כאשר אנו מחלקים ביטויים אלו ב- Δt , ומבצעים את הגבול כאשר $\Delta t \to 0$, אנו מקבלים

$$|\mathbf{v}| = \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \frac{ds}{dt} ,$$

כלומר,

$$\dot{s} = |\mathbf{v}| = v .$$



תרשים 8

נובע מהמשוואה האחרונה שאורך המסלול שהחלקיק מבצע בין הזמנים t_1 ו- t_2 יהיה

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt \, .$$

1.4.3 וקטור היחידה המשיק

כזכור מסעיף 1.4.1, התנועה המשיקה בנקודה $\mathbf{r}_0$ היתה תנועה במהירות קבועה $\mathbf{v}_0 = \dot{\mathbf{r}}(t_0)$, ולכן וקטור היחידה $\mathbf{t}$ בכיוון המשיק בנקודה $\mathbf{r}_0$ יהיה נתון על ידי

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{v}}{v} = \frac{\mathbf{v}}{\dot{s}} \, .$$

על-ידי שימוש בכלל השרשרת אנו מקבלים:

$$\boxed{\mathbf{t} = \frac{\frac{d\mathbf{r}}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \, .}$$

1.4.4 נגזרת של וקטור בעל אורך קבוע

יהא $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ פונקציה וקטורית של הזמן, או כל פרמטר אחר. עבור המקרה שבו הגודל u של הוקטור $\mathbf{u}(t)$ קבוע ולא תלוי בזמן, ניתן להראות בקלות שהנגזרת של $\mathbf{u}$ לפי הפרמטר t הינה וקטור הניצב ל- $\mathbf{u}$.

הוכחה: מכיון שהאורך של $\mathbf{u}$ אינו תלוי ב- t ,

$$\frac{d}{dt}(u^2) = \frac{d}{dt}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}) = 0 .$$

אולם מהשוויון השני אנו מקבלים על סמך הכלל של גזירת מכפלה

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}) \\ &= \dot{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\dot{\mathbf{u}} \\ &= 2\mathbf{u}\cdot\dot{\mathbf{u}} , \end{aligned}$$

ומכאן

$$0 = \mathbf{u}\cdot\dot{\mathbf{u}} ,$$

והנגזרת של $\mathbf{u}$ אכן ניצבת לוקטור.

1.4.5 וקטור היחידה הנורמל, העקמומיות ורדיוס העקמומיות

מכיון שיש קשר חד-חד ערכי בין משתנה הזמן t ופרמטר אורך הקשת s , אנו יכולים להתייחס לוקטור היחידה המשיק $\mathbf{t}$ כאל וקטור התלוי בפרמטר s , כלומר, $\mathbf{t} = \mathbf{t}(s)$. ערך המשיק עבור אורך הקשת s יהיה וקטור היחידה המשיק לתנועה בנקודה לאורך המסלול הנמצאת במרחק s לאורך העקומה מנקודת היחוס על המסלול. אנו נסמן על ידי תג (') את הנגזרות של פונקציות לפי המשתנה s כך למשל $\mathbf{t} = \mathbf{r}'$.

מכיון ש-$\mathbf{t}$ הוא וקטור יחידה, הפונקציה $\mathbf{t} = \mathbf{t}(s)$, היא פונקציה וקטורית שעבורה גודל הוקטור $\mathbf{t}(s)$ קבוע. על סמך הסעיף הקודם אנו מסיקים שהנגזרת של פונקציה זו, $\mathbf{t}'$, ניצבת ל-$\mathbf{t}$. אנו נקרא לוקטור יחידה בכיוון $\mathbf{t}'$ בנקודה $\mathbf{r}_0$ על המסלול **וקטור היחידה הנורמל לעקומה** בנקודה $\mathbf{r}_0$, ונסמן אותו על ידי $\mathbf{n}$. לגודלו של הוקטור $\mathbf{t}'$ נהוג לקרוא **העקמומיות של העקומה** בנקודה $\mathbf{r}_0$, והוא יסומן על ידי κ . הגודל ההפוך, $1/\kappa$, נקרא **רדיוס העקמומיות**, והוא יסומן על ידי ρ . הסבר לשמות אלו יובא בהמשך סעיף זה. אנו יכולים לכתוב אם כן

$$\mathbf{r}'' = \mathbf{t}' = \kappa\mathbf{n} = \frac{1}{\rho}\mathbf{n} .$$

אנו שמים לב לכך שהגדלים שהגדרנו תלויים בפרמטר אורך הקשת ולא בפרמטר הזמן. לכן הם גדלים שמאפיינים את העקומה שלאורכה מתבצעת התנועה ולא תלויים בקצב שבו התנועה מתרחשת.

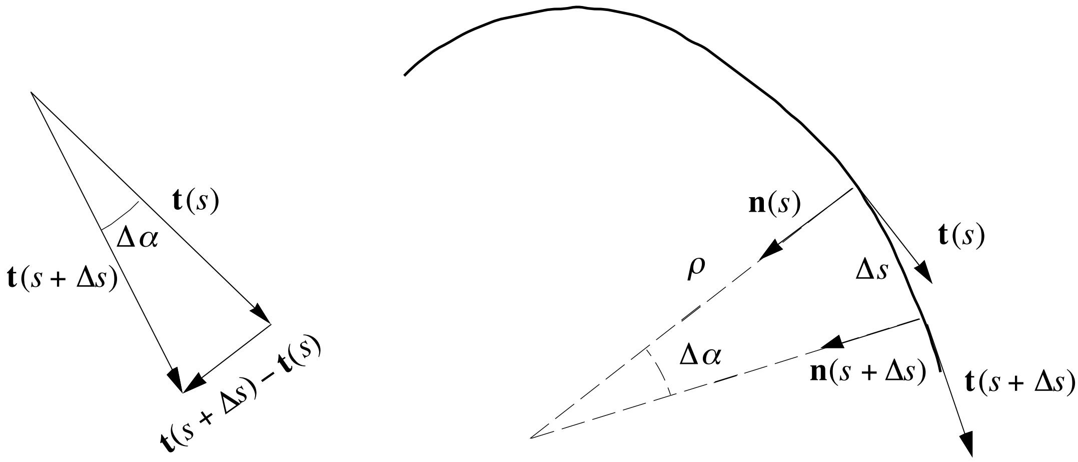
בקרוב שני ניתן לקרב את הפונקציה $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ בסביבת הנקודה $\mathbf{r}_0$ על המסלול על ידי

$$\mathbf{r} \cong \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'\,\Delta s + \mathbf{r}''\frac{\Delta s^2}{2}$$

$$\mathbf{r} \cong \mathbf{r}_0 + \mathbf{t}\Delta s + \kappa\mathbf{n}\frac{\Delta s^2}{2} .$$

מכיון שהתנועת החלקיק נמצאת בקרוב שני במישור האוסקולטורי בנקודה $\mathbf{r}_0$, גם העקומה $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ נמצאת בקרוב שני במישור האוסקולטורי, ומכיון ש-$\mathbf{t}$ הוא בכיוון המשיק, נובע מכך ש-$\mathbf{n}$ נמצא במישור

האוסקולטורי. על מנת להסביר את המשמעות הגיאומטרית של κ ו-ρ נתבונן בתרשים 9 שמראה את הקרוב השני לעקומה במישור האוסקולטורי.



תרשים 9

אנו רואים שהזווית $\Delta\alpha$ בין הוקטורים $\mathbf{t}(s)$ ו-$\mathbf{t}(s+\Delta s)$ זהה לזווית בין וקטורי היחידה הנורמליים המתאימים משום שהם ניצבים למשיקים בכל נקודה. בנוסף

$$
\begin{aligned}
\Delta\alpha &\cong \frac{|\mathbf{t}(s+\Delta s)-\mathbf{t}(s)|}{|\mathbf{t}|} \\
&\cong \left|\frac{d\mathbf{t}}{ds}\right|\Delta s \\
&\cong \kappa\Delta s
\end{aligned} \quad ,
$$

כאשר בשורה השניה השתמשנו בעובדה ש-$\mathbf{t}$ הוא וקטור יחידה. כלומר,

$$
\frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \cong \kappa
$$

ו-κ מודד את קצב השינוי של כיוון המשיק. מאידך, אם נסמן על ידי ρ את המרחק מהעקומה לנקודת החתוך של שני הישרים עליהם נמצאים וקטורי היחידה הנורמלים, אנו רואים כי

$$
\Delta\alpha \cong \frac{\Delta s}{\rho} \ ,
$$

כלומר, $\rho = 1/\kappa$.

יש לשים לב לכך שהמגמה של $\mathbf{n}$ זהה למגמה של ההפרש במשיקים , $\mathbf{t}(s+\Delta s)-\mathbf{t}(s)$, עבור שתי נקודות שכנות, ולכן, $\mathbf{n}$ פונה אל ה״צד הקעור״ של הקשת.

1.4.6 משוואת התאוצה בקואורדינטות מסלול

בשימוש המשתנים שהגדרנו אנו יכולים לכתוב עבור תאוצת החלקיק

$$
\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{r}} &= \frac{d\dot{\mathbf{r}}}{dt} \\
&= \frac{d}{dt}(\dot{s}\mathbf{t}) \\
&= \ddot{s}\mathbf{t} + \dot{s}\frac{d\mathbf{t}}{dt} \\
&= \ddot{s}\mathbf{t} + \dot{s}\frac{d\mathbf{t}}{ds}\frac{ds}{dt} \\
&= \ddot{s}\mathbf{t} + \kappa\dot{s}^2\mathbf{n} \qquad ,
\end{aligned}
$$

כאשר בשורה השניה השתמשנו בתוצאות סעיף 1.4.3, בשורה השלישית השתמשנו בכלל לגזירת מכפלה, בשורה הרביעית בכלל השרשרת ובשורה החמישית בהגדרה שבסעיף הקודם. מהגדרת רדיוס העקמומיות ובשימוש $\dot{s} = v$ נקבל

$$
\boxed{.\ \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{s}\mathbf{t} + \frac{1}{\rho}v^2\mathbf{n} = \ddot{s}\mathbf{t} + \kappa v^2\mathbf{n}}
$$

שתי המשוואות האחרונות נותנות לנו את רכיב התאוצה בכיוון המשיק, $a_t = \ddot{s}$, ורכיב התאוצה בכיוון הנורמל, $a_n = \kappa v^2 = \frac{1}{\rho}v^2$.

1.4.7 חישוב הנורמל והעקמומיות

אם נתונה תנועה כלשהי $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ לאורך עקומה, אנו יכולים לקבל ביטויים עבור העקמומיות והנורמל לעקומה, ממשוואת התאוצה בקואורדינטות מסלול. על ידי כפל סקלרי של הביטוי עבור התאוצה בקואורדינטות מסלול בוקטור היחידה $\mathbf{t}$ ושימוש בעובדה ש-$\mathbf{n}$ ניצב ל-$\mathbf{t}$, אנו מקבלים

$$
.\ \ddot{s} = \ddot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{t} = \ddot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\dot{\mathbf{r}}}{v}
$$

מכאן ניתן לרשום על ידי שימוש נוסף במשוואת התאוצה

$$
\begin{aligned}
\kappa v^2\mathbf{n} &= \ddot{\mathbf{r}} - \ddot{s}\mathbf{t} \\
&= \ddot{\mathbf{r}} - \left(\ddot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\dot{\mathbf{r}}}{v}\right)\frac{\dot{\mathbf{r}}}{v} \\
&= \ddot{\mathbf{r}} - \frac{(\ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}})\dot{\mathbf{r}}}{v^2} \qquad .
\end{aligned}
$$

מכיון ש-$\mathbf{n}$ הוא וקטור יחידה, גודלו של הוקטור באגף ימין של המשוואה האחרונה הוא κv^2 , ואילו $\mathbf{n}$ הוא וקטור יחידה בכיוון הוקטור באגף ימין. לכן

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{v^2}\left|\ddot{\mathbf{r}} - \frac{(\ddot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}})\dot{\mathbf{r}}}{v^2}\right|$$
$$\mathbf{n} = \frac{1}{\kappa v^2}\left[\ddot{\mathbf{r}} - \frac{(\ddot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}})\dot{\mathbf{r}}}{v^2}\right].$$

ניתן לקבל ביטויים נוספים עבור העקמומיות (מובן שביטויים אלו יהיו שקולים לביטויים שכבר קיבלנו) על ידי כפל וקטורי של הביטוי עבור התאוצה בקואורדינטות מסלול בוקטור היחידה $\mathbf{t}$. מכיון שהמכפלה הוקטורית של $\mathbf{t}$ בעצמו מתאפסת, וגודל התוצאה של המכפלה הוקטורית בין $\mathbf{t}$ ל-$\mathbf{n}$ הוא 1 (כי הם וקטורי יחידה הניצבים זה לזה), ניתן לכתוב

$$\ddot{\mathbf{r}}\times\mathbf{t} = \ddot{s}\mathbf{t}\times\mathbf{t} + \kappa v^2\mathbf{n}\times\mathbf{t}$$
$$\ddot{\mathbf{r}}\times\mathbf{t} = \kappa v^2\mathbf{n}\times\mathbf{t}$$
$$|\ddot{\mathbf{r}}\times\mathbf{t}| = \kappa v^2,$$

$$\boxed{\kappa = \frac{|\ddot{\mathbf{r}}\times\dot{\mathbf{r}}|}{v^3}.}$$

במעבר מהשורה השלישית לרביעית השתמשנו כמובן בעובדה ש-$\dot{\mathbf{r}} = v\mathbf{t}$. שים לב, מכיון ש-$\mathbf{n}$ ו-$\mathbf{t}$ נמצאים במישור האוסקולטורי, וקטור היחידה $\mathbf{n}\times\mathbf{t}$ הוא וקטור היחידה הניצב למישור האוסקולטורי. נובע מכך שהוקטור $\mathbf{t}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{t})$ נמצא במישור האוסקולטורי (כי הוא ניצב לוקטור הניצב למישור), וכמו כן הוא ניצב לוקטור $\mathbf{t}$. כלומר, וקטור היחידה $\mathbf{t}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{t})$ הוא פשוט $\mathbf{n}$ (בדוק שאכן מתקבל $\mathbf{n}$ ולא וקטור בכיוון הפוך). אם נכפול וקטורית את השורה השניה למעלה ב-$\mathbf{t}$ נקבל

$$\mathbf{t}\times(\ddot{\mathbf{r}}\times\mathbf{t}) = \kappa v^2\mathbf{t}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{t})$$
$$= \kappa v^2\mathbf{n},$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{t}\times(\ddot{\mathbf{r}}\times\mathbf{t})}{\kappa v^2}$$
$$= \frac{\left(\frac{\dot{\mathbf{r}}}{v}\right)\times\left(\ddot{\mathbf{r}}\times\frac{\dot{\mathbf{r}}}{v}\right)}{\frac{|\ddot{\mathbf{r}}\times\dot{\mathbf{r}}|}{v^3}v^2},$$

כאשר השתמשנו במעבר לשורה האחרונה בביטוי שקיבלנו עבור κ. ממשוואה זו נקבל

$$\boxed{\mathbf{n} = \frac{\dot{\mathbf{r}}\times(\ddot{\mathbf{r}}\times\dot{\mathbf{r}})}{v|\ddot{\mathbf{r}}\times\dot{\mathbf{r}}|}.}$$

ברור שבמשוואות שקיבלנו, הפרמטר t לא חייב להיות בעל משמעות פיזיקלית של זמן, אלא יכול להיות כל פרמטר אחר.

דוגמה 1.4.8

נתונה עקומה במישור על ידי $y = y(x)$. דרוש למצוא ביטוי עבור העקמומיות של העקומה.

פתרון: אנו יכולים לקחת את המשתנה x בתור פרמטר, לפיכך, נדון בתנועה לאורך העקומה הנתונה כך ש- $x = t$, $y(x) = y(t)$ ו- $y' = \dot{y}$. ניתן לכתוב אם כן

$$\mathbf{r} = t\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{y}\mathbf{j} ,$$

$$v = \left(1 + \dot{y}^2\right)^{1/2}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} = -\ddot{y}\mathbf{k} ,$$

ומתקבל לבסוף

$$\kappa = \frac{|\ddot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}|}{v^3} = \frac{|\ddot{y}|}{\left(1 + \dot{y}^2\right)^{3/2}} = \frac{|y''|}{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}} .$$

דוגמה 1.4.9

תנועת חלקיק נתונה על ידי

$$\mathbf{r} = c\cos t\mathbf{i} + c\sin t\mathbf{j} + bt\mathbf{k} .$$

מצא עבור הזמן $t = 0$,

1. את הרכיב המשיקי של התאוצה,
2. את הרכיב הנורמלי של התאוצה,
3. את המשיק לעקומה,
4. את הנורמל לעקומה,
5. את רדיוס העקמומיות.

פתרון: על ידי גזירה נקבל

$$\dot{\mathbf{r}} = -c\sin t\mathbf{i} + c\cos t\mathbf{j} + b\mathbf{k}$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = -c\cos t\mathbf{i} - c\sin t\mathbf{j} ,$$

ובהצבת $t = 0$,

$$\dot{\mathbf{r}} = c\mathbf{j} + b\mathbf{k} ,$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = -c\mathbf{i} ,$$

$$v = \sqrt{b^2 + c^2} ,$$

$$\mathbf{t} = \frac{c\mathbf{j} + b\mathbf{k}}{\sqrt{b^2 + c^2}} ,$$

$$\ddot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -c & 0 & 0 \\ 0 & c & b \end{vmatrix} = bc\mathbf{j} - c^2\mathbf{k} ,$$

$$\dot{\mathbf{r}} \times (\ddot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & c & b \\ 0 & bc & -c^2 \end{vmatrix} = -(c^3 + cb^2)\mathbf{i} \,.$$

הערך שקיבלנו עבור $\mathbf{t}$ מהווה תשובה לסעיף 3. נציב את הערכים שחישבנו לנוסחאות עבור $\mathbf{n}$ ו-κ ,

$$\kappa = \frac{|\ddot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}|}{v^3} = \frac{c\sqrt{b^2+c^2}}{\left(b^2+c^2\right)^{3/2}} = \frac{c}{b^2+c^2}$$

$$\rho = \frac{1}{\kappa} = \frac{b^2+c^2}{c}$$

$$\mathbf{n} = \frac{\dot{\mathbf{r}} \times (\ddot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}})}{v\,|\ddot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}|} = \frac{-(c^3+cb^2)\mathbf{i}}{\sqrt{b^2+c^2}\;c\sqrt{b^2+c^2}} = -\mathbf{i} \,,$$

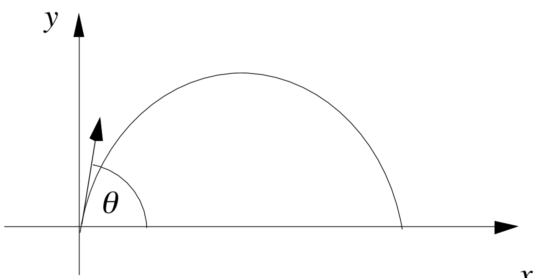
וכך קיבלנו את התשובות לסעיפים 5 ו-4 בהתאמה. התשובות לסעיפים 1 ו-2 תהינה

$$\begin{aligned} a_t &= \ddot{s} = \ddot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{t} = 0 \\ a_n &= \ddot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{n} = c \end{aligned} \,.$$

ניתן היה כמובן לקבל את התוצאות הללו בדרכים אחרות. למשל, יכולנו לחשב את a_t מיד לאחר חישוב המהירות, המשיק והתאוצה. לאחר זאת ניתן להשתמש בביטוי $a_n\mathbf{n} = \ddot{\mathbf{r}} - a_t\mathbf{t}$ בכדי לחשב את a_n , שהוא גודלו של הוקטור $\ddot{\mathbf{r}} - a_t\mathbf{t}$, ואת $\mathbf{n}$, שהוא וקטור יחידה בכיוון הוקטור $\ddot{\mathbf{r}} - a_t\mathbf{t}$. את העקמומיות ניתן היה למצוא מהנוסחה $a_n = \kappa v^2$.

דוגמה 1.4.10

חלקיק נזרק בזווית של θ מעלות לאופק במישור אנכי במהירות v_0 . חשב את הגדלים $\ddot{s}$ ורדיוס העקמומיות עבור המצב מיד לאחר הזריקה, והמצב בו החלקיק נמצא בשיא המסלול.



תרשים 10

פתרון: אם נסמן את כיווני הצירים x ו-y כמתואר בתרשים 10, הרי תאוצת החלקיק הנע באופן חופשי היא כמובן $\mathbf{a} = -g\mathbf{j}$, כאשר g היא תאוצת הכובד. במצב מיד לאחר הזריקה

$$\mathbf{t} = \cos\theta\mathbf{i} + \sin\theta\mathbf{j}$$
$$\ddot{s} = a_t = \mathbf{a}\cdot\mathbf{t} = -g\sin\theta$$
$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \sqrt{g^2 - g^2\sin^2\theta} = g\cos\theta$$
$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v^2}{g\cos\theta}\ .$$

בשיא המסלול

$$\mathbf{v} = v\cos\theta\mathbf{i}$$
$$\mathbf{t} = \mathbf{i}$$
$$\ddot{s} = a_t = \mathbf{a}\cdot\mathbf{t} = 0$$
$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} = g$$
$$\rho = \frac{(v\cos\theta)^2}{g} = \frac{v^2\cos^2\theta}{g}\ .$$

אייזק ניוטון (*1642-1727*) נולד בלינקולנשייר שבאנגליה. ניוטון למד באוניברסיטת קיימברידג׳ ובשנת 1669 כבר הוכתר בתואר פרופסור. בשנים 1665-66 גילה ניוטון את החשבון הדיפרנציאלי אותו כינה בשם ״תורת השטפים״. הוא קישר את מושג הנגזרת עם התופעות הפיסיקליות בהן היא מוצאת שימוש, ובפרט מושג המהירות. הוא אף סימן את הנגזרות על ידי נקודה מעל שמות המשתנים בדיוק כפי שאנו נוהגים כיום. שנים אלו, בהן שהה בעיר מולדתו עקב מגיפה שהיתה בקיימברידג׳, נחשבות לשנים הפוריות ביותר בחייו ובהן הוא אף גילה את חוק המשיכה בין מסות. ניוטון שהה בקיימברידג׳ עד 1696 ובשנת 1687 פרסם את סיפרו "*Philosophiae naturalis principia matematica*" שבו יסד את המכניקה הקלאסית על בסיס אקסיומטי. בספרו זה הציג לראשונה את מושגי המסה והתנע וניסח את שלושת חוקי התנועה המפורסמים וחוק משיכת המסות המשמשים כבסיס לחישובים ההנדסיים במכניקה עד היום.

פרק 2: קינטיקה של חלקיק

2.0 מבוא

פרק זה עוסק בחוקים אשר מקשרים את תנועתו של חלקיק לכוחות שפועלים עליו. החוק הבסיסי הוא כמובן החוק השני של ניוטון, המשווה את הכוח לקצב שינוי התנע הקווי במערכת אינרציאלית, או במילים אחרות, למכפלת מסת החלקיק בתאוצתו, כפי שהיא נמדדת במערכת אינרציאלית. את התנע של חלקיק ואת התנע הזוויתי, שהוא גודל הנגזר ממנו, נציג בסעיף 2.1. בסעיף 2.2 ננסח את החוק הראשון והחוק השני של ניוטון שהם החוקים הבסיסיים של הדינמיקה הקלאסית, ונביא דוגמאות לשימוש בהם. חוקי התנועה מספקים לנו למעשה משוואה דיפרנציאלית עבור התנועה, ואנו נראה שיטות לפתרון המשוואות הללו למספר מקרים פרטיים פשוטים, אשר לא יצריכו אותנו לדון בתורת המשוואות הדיפרנציאליות. בסעיף 2.3 נציג את המושגים של עבודה ואנרגיה קינטית אשר מאפשרים לנו ניסוח אלטרנטיבי של חוקי התנועה. כוחות משמרים ואנרגיה פוטנציאלית מוצגים בהמשכו של סעיף זה.

2.1 תנע קווי ותנע זוויתי של חלקיק

2.1.1 תנע קווי של חלקיק

התנע, או **התנע הקווי**, של חלקיק יחסית למערכת נתונה מוגדר כמכפלת המסה של החלקיק במהירותו יחסית למערכת. נסמן את מסת החלקיק ב-m ואת התנע על ידי $\mathbf{p}$, ולכן

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} .$$

התנע הקווי הוא כמובן וקטור.

2.1.2 התנע הזוויתי של חלקיק

התנע הזוויתי או **מומנט התנע** של חלקיק יחסית למערכת נתונה מוגדר כמכפלה הוקטורית של וקטור המקום של החלקיק יחסית למערכת, בתנע של החלקיק. אנו נסמן את התנע הזוויתי על ידי $\mathbf{H}$. מהגדרתו הוא כמובן וקטור, ונתון על ידי המשוואה

$$\mathbf{H} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} .$$

2.2 חוקי התנועה של ניוטון

2.2.1 החוק הראשון של ניוטון

כזכור מהסעיפים 1.1.1 ו-1.2.1 מדידה כמותית של וקטורי המהירות והתאוצה, תלויה בבחירתה של מערכת הצירים בה אנו משתמשים, ועד כה אין לנו כל בסיס להעדיף מערכת אחת על חברתה. החוק הראשון של ניוטון מאפשר לנו לקבוע סוג מסוים של מערכות צירים עדיפות. אנו ננסח את החוק הראשון של ניוטון

באופן הבא:

קיימת מערכת צירים בה המהירות של חלקיק קבועה כאשר שקול הכוחות הפועלים על החלקיק מתאפס.

בבסיסו של החוק הראשון של ניוטון מונחת ההנחה שאנו יודעים מהם הכוחות הפועלים על החלקיק. ברור שהמהירות קבועה במקרה הנדון כוקטור, לכן, החלקיק נע בהעדר כוחות במהירות קבועה על קו ישר.

2.2.2 מערכות אינרציאליות

מהחוק הראשון של ניוטון נובע, שמתוך כל המערכות שניתן לבחור לתאור התנועה, קיימת מערכת עדיפה אותה אנו יכולים לאתר על ידי הבדיקה שהחלקיק אכן נע בתנועה שוות מהירות בהעדר כוחות. נניח שמערכת א׳ מקיימת את התנאי הזה. תהא מערכת ב׳, מערכת הנעה יחסית למערכת א׳, כך שהראשית נעה במהירות קבועה, ווקטורי הבסיס קבועים. ברור, וניתן להוכיח בקלות על סמך סעיף 4.3.1, כי תאוצת החלקיק בשתי המערכות הללו תהיה שווה.

אנו מסיקים מכך, שאם סכום הכוחות על החלקיק מתאפס, הוא ינוע במהירות קבועה גם במערכת ב׳, או בכל מערכת הנעה בתנועת העתקה במהירות קבועה יחסית למערכת א׳. כלומר, המערכת א׳ שאיתרנו, אינה מערכת יחידה. המערכות הללו, עבורן חלקיק נע במהירות קבועה אם שקול הכוחות עליו מתאפס, נקראות **מערכות אינרציאליות**. אנו מסיקים אם כן שלחלקיק ישנה אותה תאוצה בכל המערכות האינרציאליות.

2.2.3 החוק השני של ניוטון

החוק השני של ניוטון קובע כי

במערכת אינרציאלית שווה שקול הכוחות הפועל על חלקיק לקצב השינוי של התנע הקווי שלו.

כלומר, אנו יכולים לנסח את החוק השני של ניוטון באמצעות המשוואה

$$\boxed{\sum \mathbf{f} = \dot{\mathbf{p}} = m\mathbf{a}}$$

כאשר $\sum \mathbf{f}$ מסמן את סכום הכוחות החיצוניים, $\mathbf{p}$ ו-$\mathbf{a}$ הם התנע והתאוצה יחסית למערכת אינרציאלית, והשוויון השני נובע מכך שאנו מניחים במכניקה קלאסית שמסתו של חלקיק אינה משתנה.

במשוואה זו אנו יכולים להשתמש באופן מעשי לחישובים רק כאשר אנו רושמים את רכיביה השונים ביחס לבסיס נתון. נרשום להלן את המשוואות עבור מערכות קואורדינטות שונות.

במערכת קואורדינטות קרטזית המשוואות הן

$$\boxed{\begin{aligned} \sum f_x &= ma_x = m\ddot{x} \\ \sum f_y &= ma_y = m\ddot{y} \\ ,\ \sum f_z &= ma_z = m\ddot{z} \end{aligned}}$$

במערכת קואורדינטות פולרית במישור המשוואות הן

$$\boxed{\begin{aligned}\sum f_r &= ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \\ \sum f_\theta &= ma_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\end{aligned}}$$

וביחס לקואורדינטות מסלול

$$\boxed{\begin{aligned}\sum f_t &= ma_t = m\ddot{s} \\ .\sum f_n &= ma_n = \frac{mv^2}{\rho} = m\kappa v^2\end{aligned}}$$

2.2.4 דוגמה

חלקיק נע במרחב תחת השפעת כוח התלוי בזמן, שרכיביו במערכת צירים קרטזית, נתונים באמצעות המשוואות הבאות:

$$\begin{aligned}f_x &= -A\sin\omega t \\ f_y &= -A\cos\omega t \\ .\ f_z &= B\end{aligned}$$

כאשר הקבועים A, B, ω נתונים. כמו כן נתון שבזמן $t = 0$ החלקיק נמצא בנקודה $(0,1,0)$ ומהירותו הינה v_0 בכיוון z. חשב את מהירות החלקיק ומקומו בתלות הזמן.

פתרון: דוגמה זו אופיינית לבעיות בהן רכיבי הכח נתונים בתלות הזמן. החוק השני של ניוטון יאפשר לנו במקרה זה לקבל את התאוצה בתלות הזמן. אינטגרציה ושימוש בתנאי ההתחלה הנתונים יאפשרו את קבלת המהירות ולאחר מכן מסלול החלקיק.

מהחוק השני של ניוטון אנו מקבלים

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\frac{A}{m}\sin\omega t \\ \ddot{y} &= -\frac{A}{m}\cos\omega t \\ .\ \ddot{z} &= \frac{B}{m}\end{aligned}$$

נבצע אינטגרציה לפי הזמן לקבלת המהירות

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{A}{m\omega}\cos\omega t + c_1 \\ \dot{y} &= -\frac{A}{m\omega}\sin\omega t + d_1 \\ .\ \dot{z} &= \frac{B}{m}t + e_1\end{aligned}$$

כאשר c_1, d_1, e_1 קבועים. בהצבת תנאי ההתחלה $\dot{x}(0)=0,\ \dot{y}(0)=0,\ \dot{z}(0)=v_0$ נקבל

$$c_1=-\frac{A}{m\omega},\quad d_1=0,\quad e_1=v_0\ ,$$

$$\dot{x}=\frac{A}{m\omega}(\cos\omega t-1)$$

$$\dot{y}=-\frac{A}{m\omega}\sin\omega t$$

$$\dot{z}=\frac{B}{m}t+v_0\ .$$

נבצע אינטגרציה פעם נוספת

$$x=\frac{A}{m\omega^2}(\sin\omega t-\omega t)+c_2$$

$$y=\frac{A}{m\omega^2}\cos\omega t+d_2$$

$$z=\frac{B}{2m}t^2+v_0t+e_2$$

ונציב את תנאי ההתחלה לצורך חישוב קבועי האינטגרציה

$$c_2=0,\quad d_2=1-\frac{A}{m\omega^2},\quad e_2=0\ ,$$

כך שהתוצאה הסופית הינה

$$x=\frac{A}{m\omega^2}(\sin\omega t-\omega t)$$

$$y=1+\frac{A}{m\omega^2}(\cos\omega t-1)$$

$$z=\frac{B}{2m}t^2+v_0t\ .$$

2.2.5 פתרון משוואת התנועה כאשר הכוח תלוי במהירות

כאשר בבעיה חד-מימדית הכוח תלוי במהירות החלקיק בלבד, משוואת התנועה תהיה

$$\ddot{x}=\frac{1}{m}f(v)\ ,$$

כאשר $f(v)$ היא הפונקציה המתארת את תלות הכוח במהירות. אם נציב במשוואה זו $\frac{dv}{dt}$ במקום $\ddot{x}$ נקבל

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{m} f(v) ,$$

$$m \frac{dv}{f(v)} = dt ,$$

ועל ידי ביצוע אינטגרציה יתקבל

$$, \quad m \int \frac{dv}{f(v)} = \int dt + c = t + c$$

כאשר הקבוע c יקבע על ידי תנאי ההתחלה. נסמן את הפונקציה הקדומה של הפונקציה $\frac{1}{f(v)}$ על ידי $F(v)$. ניתן אם כן לכתוב את המשוואה האחרונה בצורה

$$. \quad F(v) = \frac{t + c}{m}$$

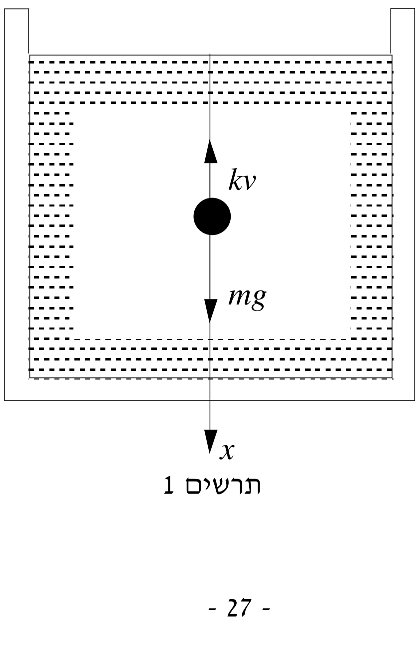
מכיון שאנו מעוניינים לקבל את המהירות בתלות הזמן, עלינו לפתור את משוואה זו עבור v, או במילים אחרות, אם G היא הפונקציה ההפוכה לפונקציה F, אזי

$$, \quad v = G\left(\frac{t + c}{m}\right)$$

שהיא התוצאה המבוקשת. את תלות המקום בזמן יהיה כעת אפשר למצוא באמצעות אינגרציה של המשוואה האחרונה.

דוגמה 2.2.6

חלקיק בעל מסה m משוחרר ממנוחה בתוך נוזל ומתחיל בתנועה מטה כתוצאה מכוח הכובד. בהנחה שכוח ההתנגדות של הנוזל לתנועת החלקיק נתון על ידי kv כאשר k הוא קבוע, מצא את תלות מהירותו ומקומו של החלקיק בזמן.



תרשים 1

פתרון: אם נעזר בסימנים המוצגים בתרשים 1 נוכל לרשום את משוואת התנועה של החלקיק בצורה

$$m\ddot{x} = mg - kv \,,$$

$$.\ \frac{dv}{dt} = \frac{1}{m}(mg - kv)$$

כלומר, משוואת התנועה היא מהסוג שתיארנו בסעיף הקודם וכעת $f(v) = mg - kv$. הפונקציה F שהיא הפונקציה הקדומה לפונקציה

$$\frac{1}{f(v)} = \frac{1}{mg - kv}$$

היא

$$.\ F(v) = -\frac{1}{k}\ln(mg - kv)$$

נציב זאת במשוואה

$$,\ F(v) = \frac{t + c}{m}$$

שפיתחנו ונקבל

$$.\ \frac{t + c}{m} = -\frac{1}{k}\ln(mg - kv)$$

בשימוש תנאי ההתחלה $v(t = 0) = 0$, נקבל

$$,\ c = -\frac{m}{k}\ln mg$$

כלומר,

$$.\ t = -\frac{m}{k}\ln\left(\frac{mg - kv}{mg}\right)$$

על ידי חילוץ v או הפיכת פונקציה זו תתקבל תלות המהירות בזמן

$$.\ v = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

נשים לב לעובדה, שעבור ערכים גדולים של הזמן, המהירות שואפת לערך שעבורו כוח התנגדות המים , kv , מאזן את כוח הכובד.

אינטגרציה נוספת תיתן את תלות מקום החלקיק בזמן, ובהנחה שהחלקיק משוחרר מפני הנוזל, $x = 0$

$$x = \frac{mg}{k}\left[t + \frac{m}{k}\left(e^{-\frac{k}{m}t} - 1\right)\right].$$

2.2.7 פתרון משוואת התנועה כאשר הכוח תלוי במקום

באופן מקביל לסעיף 2.2.5, נפתח בסעיף זה שיטה פשוטה לטיפול במקרה, בו הכוח על חלקיק בתנועה חד-מימדית תלוי במקומו של החלקיק, וזאת מבלי להשתמש בתורת המשוואות הדיפרנציאליות. נניח אם כן, שנתונה הפונקציה $f(x)$, הנותנת את הכוח כתלות במקומו של החלקיק. משוואת התנועה תהיה אם כן

$$\ddot{x} = \frac{1}{m} f(x).$$

פתרון המשוואה מבוסס על הזהות

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \frac{d\dot{x}}{dt} \\ &= \frac{d\dot{x}}{dx}\frac{dx}{dt} \\ &= \dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} \\ &= \frac{d}{dx}\left(\tfrac{1}{2}\dot{x}^2\right),\end{aligned}$$

כאשר בשורה השניה ובשורה הרביעית השתמשנו בכלל השרשרת. נובע מהזהות כי ניתן לרשום את משוואת התנועה בצורה

$$\frac{d}{dx}\left(\tfrac{1}{2}\dot{x}^2\right) = \frac{1}{m} f(x),$$

$$\tfrac{1}{2} d\left(\dot{x}^2\right) = \frac{1}{m} f(x)dx,$$

ועל ידי אינטגרציה

$$\tfrac{1}{2}\dot{x}^2 = \frac{1}{m}\int f(x)dx + c$$

משוואה אחרונה זו מזכירה את חוק העבודה והאנרגיה, ואכן נפתח בהמשך באופן דומה את חוק העבודה והאנרגיה לתנועת חלקיק בתנועה תלת-מימדית כלשהי. על ידי הוצאת שורש אנו יכולים לבטא את תלות המהירות במקום בצורה:

$$\dot{x} = G(x), \quad G(x) = \sqrt{\frac{2}{m}\int f(x)dx + c}.$$

את תלות המקום בזמן ניתן לקבל מהמשוואה $\frac{dx}{dt} = G(x)$ שקיבלנו על ידי התהליך הבא של הפרדת משתנים

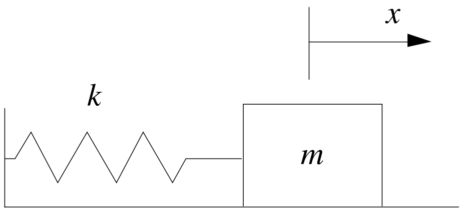
$$\frac{dx}{G(x)} = dt$$

$$t = \int \frac{dx}{G(x)} + d = H(x).$$

בחילוץ x מהמשוואה האחרונה (כלומר, הפיכת הפונקציה H) נקבל את תלות המקום בזמן. הקבועים c ו-d יתקבלו על ידי הצבת התנאים בזמן $t = 0$.

2.2.8 דוגמה

חלקיק בעל מסה m מחובר לקפיץ בעל קשיחות k. לפיכך, אם נשתמש בסימון המתואר בתרשים 2, ניתן יהיה לרשום את הכוח בצורה $f = f(x) = -kx$. דרוש למצוא את תלות מקום החלקיק בזמן אם נתון שבמצבו ההתחלתי, $t = 0$, נמצא החלקיק במנוחה במקום x_0.



תרשים 2

פתרון: בשימוש תוצאות הסעיף הקודם אנו רושמים

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\dot{x}^2 &= \frac{1}{m}\int f(x)dx + c \\ &= -\frac{k}{m}\int x dx + c \\ &= -\frac{k}{2m}x^2 + c \end{aligned},$$

כלומר,

$$G(x) = \pm\sqrt{2c - \frac{k}{m}x^2}.$$

מכאן

$$
\begin{aligned}
t &= \int \frac{dx}{G(x)} + d, \\
&= \pm \int \frac{dx}{\sqrt{2c - \frac{k}{m}x^2}} + d, \\
&= \pm \sqrt{\frac{m}{k}} \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{k}{2cm}}x\right) + d, \\
.x &= \pm \sqrt{\frac{2cm}{k}} \sin\left[\sqrt{\frac{k}{m}}(t-d)\right]
\end{aligned}
$$

ועל ידי גזירה נקבל

$$
,\dot{x} = \pm\sqrt{2c}\cos\left[\sqrt{\frac{k}{m}}(t-d)\right]
$$

ומהצבת תנאי ההתחלה $v(0) = 0$

$$
\begin{aligned}
d &= \sqrt{\frac{m}{k}}\frac{\pi}{2}, \\
.x &= \pm\sqrt{\frac{2cm}{k}}\sin\left[\sqrt{\frac{k}{m}}t - \frac{\pi}{2}\right]
\end{aligned}
$$

בהצבת תנאי ההתחלה השני (צריך לבחור בסימן המינוס כדי לקיים את התנאי)

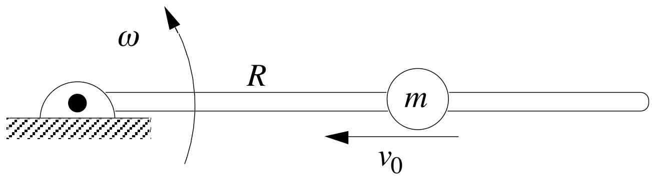
$$
,x_0 = -\sqrt{\frac{2cm}{k}}\sin\left[-\frac{\pi}{2}\right]
$$

נקבל לבסוף את התוצאה המבוקשת

$$
\begin{aligned}
c &= \frac{x_0^2 k}{2m}, \\
.x &= -x_0 \sin\left[\sqrt{\frac{k}{m}}t - \frac{\pi}{2}\right] = x_0 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t
\end{aligned}
$$

2.2.9 דוגמא

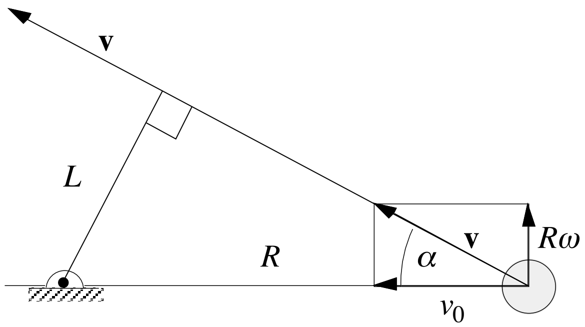
חלקיק בעל מסה חופשי להחליק ללא חיכוך לאורכו של מוט חסר מסה. במצב ההתחלתי נתונה המהירות הזוויתית של המוט $\dot{\theta} = \omega$, המרחק R, של החלקיק מציר הסיבוב, והמהירות היחסית בין המסה למוט, v_0. דרוש לחשב את המרחק המינימלי מציר הסיבוב של המוט אליו יגיע החלקיק ואת הערכים של $\dot{\theta}$, $\dot{r}$, $\ddot{\theta}$, $\ddot{r}$ במצב זה.



תרשים 3

פתרון: אין חיכוך או מומנט חיצוני בציר הסיבוב של המוט ולפיכך, הכוח שהחלקיק מפעיל על המוט בניצב למוט, הוא הכוח היחידי העשוי להפעיל מומנט כלשהו על המוט יחסית לצירו. מכיון שהמוט חסר מסה, סכום המומנטים עליו חייב להתאפס, ולכן החלקיק לא מפעיל על המוט כוח בניצב לו. מהחוק השלישי של ניוטון אנו מסיקים שהמוט לא מפעיל כוח על החלקיק בניצב למוט. מכיון שאין חיכוך בין המוט לחלקיק, הרי גם בכיוון המוט אין המוט מפעיל כוח על החלקיק, וסכום הכוחות על החלקיק מתאפס. נובע מהחוק השני של ניוטון, שגם התאוצת החלקיק מתאפסת ,והחלקיק נע במהירות קבועה על קו ישר.

במצב ההתחלתי הנתון



תרשים 4

$$\mathbf{v} = v_r\hat{\mathbf{r}} + v_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}$$
$$. \quad = -v_0\hat{\mathbf{r}} + R\omega\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

המרחק הקצר ביותר מהציר בו ימצא החלקיק יהיה המרחק בין אותו ישר והציר. ברור גם (ראה תרשים 4), שבמצב זה המהירות של החלקיק ניצבת למוט, כלומר, היא בכיוון ההיקפי בלבד. אנו מסיקים מהתרשים כי המרחק הקצר ביותר L נתון על ידי

$$. L = R\sin\alpha = R\frac{R\omega}{\sqrt{v_0^2 + R^2\omega^2}} = \frac{R^2\omega}{\sqrt{v_0^2 + R^2\omega^2}}$$

כמו כן, במצב בו החלקיק נמצא במרחק הקצר ביותר מציר הסיבוב

$$\dot{r} = v_r = 0 \; ,$$
$$, \; v_\theta = |\,\mathbf{v}\,| = \sqrt{v_0^2 + R^2\omega^2} = L\dot{\theta}$$

ומתקבל

$$\dot\theta = \frac{\sqrt{v_0^2 + R^2\omega^2}}{L} = \frac{v_0^2 + R^2\omega^2}{R^2\omega} .$$

מכיון שהמהירות קבועה, רכיבי התאוצה מתאפסים: $a_\theta = 2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta = 0$, $a_r = \ddot r - r\dot\theta^2 = 0$.
לכן,

$$\ddot r = L\dot\theta^2 = \frac{\left(v_0^2 + R^2\omega^2\right)^{3/2}}{R^2\omega} ,$$

$$\ddot\theta = -\frac{2\dot r\dot\theta}{L} = 0 .$$

העובדה שמהירות החלקיק קבועה, הקלה מאוד על פתרון התרגיל, משום שמסלול החלקיק הוא פשוט מאוד. דרך הפתרון למקרה מסובך יותר תוצג בדוגמאות הבאות.

2.2.10 דוגמה

נתבונן שוב במערכת המתוארת בתרשים 3. נתון כעת, שמהירות החלקיק יחסית למוט קבועה ונתונה. כלומר, $\dot r = -v = \text{const}$. דרוש לחשב את הכוח הפועל על החלקיק, את תלות המהירות הזוויתית ותלות התאוצה הזוויתית, בזמן אם נתונים המהירות הזוויתית ההתחלתית, ω_0 , והמרחק ההתחלתי מציר הסיבוב R .

פתרון: כמו בפתרון התרגיל הקודם, העובדה שהמוט חסר מסה גוררת $f_\theta = 0$, ומכאן $a_\theta = 0$. בדוגמה 1.3.7 הראינו שאם הרכיב ההיקפי של התאוצה מתאפס, הגודל $r^2\dot\theta$ קבוע. לכן, $r^2\dot\theta = R^2\omega_0$, כאשר הישוונו את הערכים בזמן אפס עם הערכים בזמן t כלשהו. ברור מהנתון כי $r = R - vt$ ולכן,

$$\dot\theta = \frac{R^2\omega_0}{(R-vt)^2} ,$$

ועל ידי גזירה (או על ידי הצבת משוואה זו ב- $a_\theta = 2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta = 0$),

$$\ddot\theta = \frac{2vR^2\omega_0}{(R-vt)^3} \cdot$$

ובהמשך

$$f_r = m(\ddot r - r\dot\theta^2) = m\left[0 - (R-vt)\frac{R^4\omega_0^2}{(R-vt)^4}\right] = -m\frac{R^4\omega_0^2}{(R-vt)^3} .$$

נציין כי העובדה שתלות המרחק r בזמן נתונה, מחייבת הפעלת כוח (אותו חישבנו) בכיוון r .

2.2.11 דוגמה

עבור המערכת המתוארת בתרשים 3, נתון כעת כי המהירות הזוויתית קבועה ונתונה, כלומר $\dot\theta = \omega = \text{const}$, ואילו החלקיק נע ללא חיכוך לאורך המוט. נתון כי בהתחלה החלקיק נמצא במרחק R מציר הסיבוב, ומהירותו v_0 בכיוון הציר. חשב את הכוח שהמוט מפעיל על החלקיק, את תלות המהירות

הרדיאלית בזמן ואת המרחק המינימלי בו ימצא החלקיק מהראשית.

פתרון: אין כוח בכיוון הרדיאלי ולכן $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \ddot{r} - r\omega^2 = 0$. את המשוואה הדיפרנציאלית שקיבלנו, $\ddot{r} = \omega^2 r$, נפתור על ידי השיטה שהצגנו בסעיף 2.2.7. כזכור, השיטה התבססה על הזהות

$$\ddot{r} = \tfrac{1}{2}\frac{d}{dr}\left(\dot{r}^2\right) ,$$

כך שאנו מקבלים,

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\frac{d}{dr}\left(\dot{r}^2\right) = \omega^2 r \, , \\
&\tfrac{1}{2}d(\dot{r}^2) = \omega^2 r dr \, , \\
&\tfrac{1}{2}\dot{r}^2 = \int \omega^2 r dr + c \, , \\
&\tfrac{1}{2}\dot{r}^2 = \frac{\omega^2 r^2}{2} + c \, .
\end{aligned}$$

על ידי הצבת תנאי ההתחלה $\dot{r}(r = R) = -v_0$, נקבל

$$\begin{aligned}
&c = \tfrac{1}{2}\left(v_0^2 - \omega^2 R^2\right), \\
&\dot{r}^2 = v_0^2 - \omega^2(R^2 - r^2) \, , \\
&|\dot{r}| = \sqrt{v_0^2 - \omega^2(R^2 - r^2)} \, .
\end{aligned}$$

החלקיק ימצא במרחק מינימלי כאשר $\dot{r} = 0$ ולכן המרחק המינימלי יהיה פתרון המשוואה $v_0^2 - \omega^2(R^2 - r^2) = 0$, שהוא

$$r_{\min} = \frac{\sqrt{\omega^2 R^2 - v_0^2}}{\omega} \, .$$

אנו רואים שעבור $v_0 = 0$, נקבל ממשוואה זו $r_{\min} = R$, כצפוי. עבור המקרה בו $v_0 = \omega R$, המהירות מתאפסת בראשית והחלקיק ישאר שם משום שלא פועל עליו כוח בכיוון הרדיאלי. עבור המקרה $v_0 > \omega R$, החלקיק יעבור את הראשית במהירות שונה מאפס וימשיך להאיץ הרחק מהציר. המשוואה שלנו לא מסוגלת לטפל במקרה זה, שגם בו המרחק המינימלי מתאפס, משום שבקואורדינטות פולריות $r > 0$, והן חסרות משמעות כמערכת קואורדינטות בראשית או עבור מצב בו יש מעבר דרך הראשית.

מכיון שהמהירות $\dot{\theta}$ קבועה, $\ddot{\theta} = 0$, והתאוצה ההיקפית והכוח יהיו

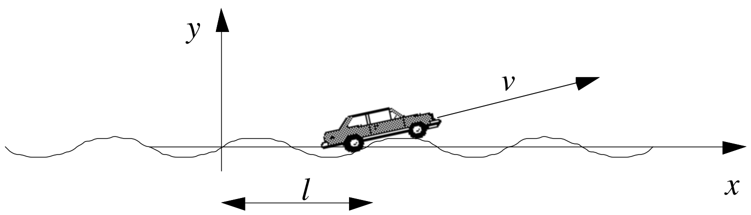
$$\begin{aligned}
&a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 2\omega\sqrt{v_0^2 - \omega^2(R^2 - r^2)} \, , \\
&f = f_\theta = 2m\omega\sqrt{v_0^2 - \omega^2(R^2 - r^2)} \, ,
\end{aligned}$$

בהתאמה. כצפוי, דרוש להפעיל כוח על החלקיק בכיוון θ בכדי לשמור על מהירות זוויתית קבועה.

דוגמה 2.2.12

מכונית נוסעת על כביש משובש במהירות בעלת גודל קבוע v (ראה תרשים 5). פני הכביש מתוארים בקרוב על ידי הפונקציה

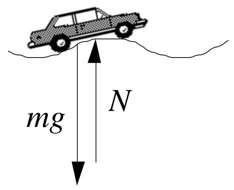
$$y = b\sin\frac{2\pi x}{l}\ .$$



תרשים 5

בהזנחת גודלה של המכונית, מצא את המהירות המכסימלית בה ניתן לנסוע בכביש, מבלי שהמכונית תינתק מהכביש.

פתרון: בתרשים 6 מתוארים הכוחות הפועלים על המכונית בכיוון y. המכונית תינתק מהכביש ברגע שהכוח N, שהכביש מפעיל על המכונית, יתאפס. מהחוק השני של ניוטון מתקבל $N - mg = m\ddot{y}$, ולכן N יתאפס כאשר תאוצת המכונית בכיוון y תהיה שווה לתאוצת הכובד $-g$.



תרשים 6

לצורך חישוב התאוצה נשתמש בקואורדינטות מסלול. מכיון שגודל המהירות קבוע, $\ddot{s} = 0$, ולכן $\mathbf{a} = \kappa v^2\mathbf{n}$. אנו רואים שהוקטור n הוא בדיוק בכיוון $-y$ כאשר

$$\sin\frac{2\pi x}{l} = 1 \quad , \quad \cos\frac{2\pi x}{l} = 0\ .$$

על ידי שימוש בנוסחה שמצאנו עבור העקמומיות בתרגיל 1.4.8, למקרה שהעקום נתון על ידי המשוואה $y = y(x)$, אנו מקבלים

$$\kappa = \frac{\frac{4\pi^2}{l^2} b\sin\frac{2\pi x}{l}}{\left[1+\left(\frac{2\pi b}{l}\right)^2\cos^2\frac{2\pi x}{l}\right]^{3/2}}\ .$$

אנו שמים לב לכך שהעקמומיות מקבלת גודל מכסימלי

$$\kappa_{\max} = \frac{4\pi^2}{l^2} b$$

בנקודות בהן הנורמל **n** מצביע כלפי מטה, ולכן

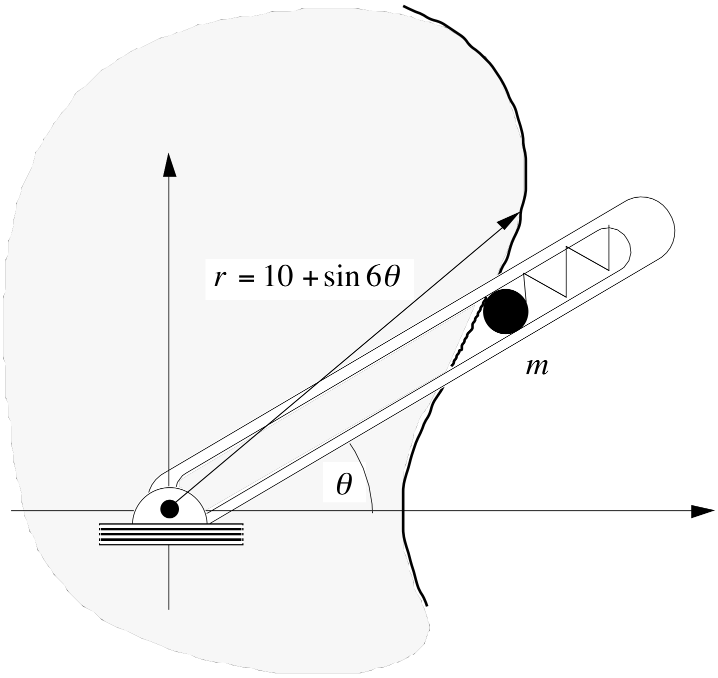
$$\ddot{y}_{\min} = (\kappa v^2 n_y)_{\min} = -\frac{4b\pi^2 v^2}{l^2} .$$

בהשוואת ערך זה ל- $-g$ נקבל

$$v_{\max} = \frac{l}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{b}} .$$

דוגמה 2.2.13

חלקיק בעל מסה $m = 0.5\ \mathrm{kg}$, נע ללא חיכוך בתוך מוט, ונלחץ על ידי קפיץ כנגד פיקה חלקה שצורתה נתונה על ידי המשוואה $r = 10 + \sin 6\theta$, כאשר r נתון במטרים (ראה תרשים 7). המוט סובב סביב צירו במהירות קבועה $\dot{\theta} = 2\ \mathrm{rad/s}$, ובמצב המתואר $\theta = 10°$, והכוח בקפיץ הוא $100\mathrm{N}$.



תרשים 7

מצא את הכוח שהמוט מפעיל על החלקיק ואת הכוח שהפיקה מפעילה על החלקיק.

פתרון: בדוגמה 1.3.6 הראינו כיצד ניתן לחשב את המהירות והתאוצה עבור מערכת כמו זו הנתונה. במקרה הכללי בו המהירות הזוויתית אינה קבועה דווקא

$$\mathbf{v} = r'\,\dot{\theta}\hat{\mathbf{r}} + \dot{\theta} r \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\mathbf{a} = (r''\dot{\theta}^2 + r'\,\ddot{\theta} - r\dot{\theta}^2)\hat{\mathbf{r}} + (2r'\,\dot{\theta}^2 + r\ddot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}} .$$

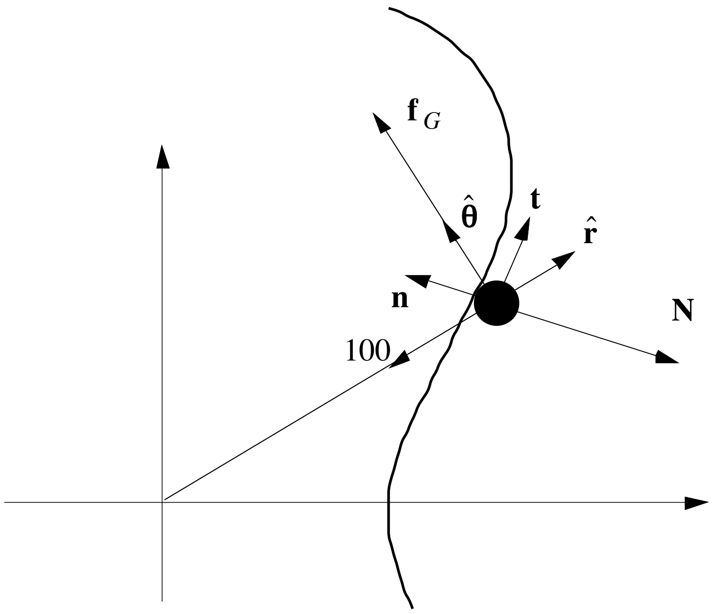
עבור הבעיה שלנו

$$r' = 6\cos 6\theta$$
$$, r'' = -36\sin 6\theta$$

ובהצבת ערך הזווית במצב הנתון

$$r = 10.87 \text{ m}$$
$$r' = 3 \text{ m/s}$$
$$r'' = -31.18 \text{ m/s}^2$$
$$\mathbf{v} = 6\hat{\mathbf{r}} + 21.17\hat{\boldsymbol{\theta}}$$
$$. \mathbf{a} = (-168.16 + 3\ddot{\theta})\hat{\mathbf{r}} + (24 + 10.87\ddot{\theta})\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

הכוחות הפועלים על החלקיק מתוארים בתרשים 8, כאשר: $\mathbf{f}_G$ הוא הכוח שהמוט מפעיל על החלקיק והוא בכיוון ההיקפי, משום שהחלקיק נע ללא חיכוך בתוך המוליך, $\mathbf{N}$ הוא הכוח שהפיקה מפעילה על החלקיק והוא בכיוון הפוך לנורמל לעקומה, הכוח בן 100 הניוטון שהקפיץ מפעיל הוא בכיוון הרדיאלי מכיון שהוא מקביל למוט.



תרשים 8

על מנת שנוכל לכתוב את רכיבי הכוח $\mathbf{N}$ ביחס לבסיס $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}$ עלינו לחשב את רכיבי וקטור היחידה $\mathbf{n}$ המקביל לו בבסיס זה. אנו מוצאים את הוקטור $\mathbf{n}$ מתוך התנאי שהוא ניצב ל-$\mathbf{t}$ (ופונה אל הצד הקעור של הקשת), כאשר את $\mathbf{t}$ נמצא על סמך העובדה שהוא וקטור יחידה מקביל למהירות. לכן,

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{v}}{v} = 0.266\hat{\mathbf{r}} + 0.964\hat{\boldsymbol{\theta}}$$
$$. \mathbf{n} = -0.964\hat{\mathbf{r}} + 0.266\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

הכוח שהפיקה מפעילה על החלקיק הוא בכיוון ההפוך ל-$\mathbf{n}$, ולכן ניתן לרשום $\mathbf{N} = 0.964N\hat{\mathbf{r}} - 0.266N\hat{\boldsymbol{\theta}}$.
החוק השני של ניוטון יהיה אם כן בצורה $\mathbf{N} + \mathbf{f}_G - 100\hat{\mathbf{r}} = m\mathbf{a}$. בשימוש התוצאות שמצאנו עד כה נקבל

$$0.964N\hat{\mathbf{r}} - 0.266N\hat{\boldsymbol{\theta}} + f_G\hat{\boldsymbol{\theta}} - 100\hat{\mathbf{r}} = (-168.16 + 3\ddot{\theta})0.5\hat{\mathbf{r}} + (24 + 10.87\ddot{\theta})0.5\hat{\boldsymbol{\theta}},$$

והפרדה לרכיבים תיתן

$$\begin{aligned} 0.964N - 100 &= -84.08 + 1.5\ddot{\theta} \\ -0.266N + f_G &= 12 + 5.44\ddot{\theta}. \end{aligned}$$

נתון לנו כי $\ddot{\theta} = 0$, והצבה במשוואות שקיבלנו תיתן $N = 16.51\ \mathrm{N}$, $f_G = 16.39\ \mathrm{N}$.

2.2.14 משוואת התנע הזוויתי של חלקיק

כאשר אנו גוזרים את הביטוי $\mathbf{H} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$, שמגדיר את התנע הזוויתי יחסית לראשית נתונה (ראה סעיף 2.1.2), אנו מקבלים

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}} &= \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{r}}) \\ &= \dot{\mathbf{r}} \times m\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times m\ddot{\mathbf{r}} \\ &= \mathbf{r} \times \left(\sum \mathbf{f}\right). \end{aligned}$$

בשורה השניה, השתמשנו בכלל לגזירת מכפלה, ובשורה השלישית, השתמשנו בעובדה, שהמכפלה הוקטורית של וקטורים מקבילים מתאפסת, ובחוק השני של ניוטון. כלומר, אם נסמן ב-$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \left(\sum \mathbf{f}\right)$ את המומנט של שקול הכוחות יחסית לראשית הנתונה, הוכחנו על סמך החוק השני של ניוטון שמתקיים

$$\mathbf{M} = \dot{\mathbf{H}}.$$

מכיון שמשוואה זו, המכונה **משוואת התנע הזוויתי**, נובעת מהחוק השני של ניוטון היא לא מכילה כל אינפורמציה נוספת.

2.2.15 משוואת התנע הזוויתי בקואורדינטות פולריות

עיקר שימושה של משוואת התנע הזוויתי הוא לצורך פתרון בעיות בקואורדינטות פולריות בהצגה שונה אך במעט מכפי שהראינו בסעיפים קודמים. בבעיות מישוריות, התנע הזוויתי והמומנט נמצאים כמובן בכיוון z, ולכן נתייחס בהמשך סעיף זה בעיקר לגודלם. עבור התנע הזוויתי ניתן לרשום

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{r} \times m(v_r\hat{\mathbf{r}} + v_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}) \\ &= mv_\theta r\mathbf{k}, \end{aligned}$$

כאשר בשורה השניה המכפלה הוקטורית של וקטורים מקבילים התאפסה. בהשתמש בעובדה כי $v_\theta = r\dot{\theta}$, נקבל

$$H = mr^2\dot{\theta}.$$

עבור המומנט

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \left(f_r \hat{\mathbf{r}} + f_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \right)$$
$$= r f_\theta \mathbf{k} \quad ,$$

וממשוואת התנע הזוויתי נקבל

$$r f_\theta = \frac{d}{dt}\left(m r^2 \dot{\theta} \right) .$$

מסקנה מיידית ממשוואה זו היא שכאשר $f_\theta = 0$, הגודל $r^2\dot{\theta}$ נשאר קבוע כפי שנובע גם מדוגמה 1.3.7.

2.2.16 יחידות הכוח

מערכות היחידות במכניקה מתחלקות לשני סוגים: בסוג הראשון, מערכות היחידות הטכניות, הכוח או המשקל הוא הגודל הבסיסי והמסה הינה גודל הנגזר מהחוק השני של ניוטון. בסוג השני, מערכות היחידות הפיסיקליות, המסה היא הגודל הבסיסי ויחידות הכוח נגזרות מיחידות המסה. התקן הבין לאומי מבוסס על מערכת יחידות פיסיקלית, אולם יש צורך להשתמש מידי פעם, בהנדסה ובחיי יום-יום, במערכות יחידות טכניות. אין כל קושי להשתמש במערכת יחידות כלשהי אם אנו מסווגים אותה לטכנית או פיסיקלית. למשל, אם ברצוננו להשתמש במערכת היחידות הטכנית שבה יחידת הכוח היא KG , קילוגרם (כוח), נובע מהחוק השני של ניוטון כי יחידת המסה במערכת זו היא

$$\frac{\mathrm{KG}}{\mathrm{m/s^2}} .$$

יחידה זו אינה מקובלת, היא אינה יחידת המסה kg הפיסיקלית בה אנו משתמשים, אולם אין כל פסול בשימוש בה. היחידה המקבילה במערכת היחידות הבריטית נמצאת בשימוש ונקראת slug . כלומר בשימוש יחידת הכוח lb במערכת טכנית מגדירים

$$\mathrm{slug} = \frac{\mathrm{lb}}{\mathrm{ft/s^2}} .$$

במערכת היחידות הפיסיקלית המטרית, המסה היא כמובן ביחידות של kg, והכוח הוא ביחידות של ניוטון, ולכן

$$\mathrm{N} = \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s^2}} .$$

ואילו במערכת היחידות הבריטית הפיסיקלית, בה יחידת המסה הינה lbm , יחידת הכוח הינה

$$\mathrm{lbm}\frac{\mathrm{ft}}{\mathrm{s^2}} ,$$

אשר אין לה שימוש רב ושמה Poundal.

לצורך מציאת הקשר בין היחידות השונות יש פשוט לזכור שיחידת הכוח הטכנית הינה המשקל של

יחידת המסה הפיסיקלית, ולכן היא תמיד גדלה פי g , תאוצת הכובד, מיחידת הכוח הפיסיקלית. את כל מעברי היחידות ניתן להשלים על סמך האינפומציה, כי $1\ \mathrm{lb} = 0.454\ \mathrm{KG}$ ותאוצת הכובד היא

$$g = 9.81\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 32.2\frac{\mathrm{ft}}{\mathrm{s}^2}.$$

2.3 עבודה ואנרגיה

2.3.1 ההספק של כוח

כאשר במצב נתון פועל על החלקיק הכוח $\mathbf{f}$, ומהירותו הינה $\mathbf{v}$, **ההספק** , P , של הכוח מוגדר על ידי

$$P = \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}.$$

שים לב לכך שהכוח $\mathbf{f}$ לא חייב להיות הכוח היחידי הפועל במצב הנתון על החלקיק. ברור מהגדרת המכפלה הסקלרית, שמתקיים $P = f_t v = f_t\dot{s}$, כאשר f_t מסמן את הרכיב המשיקי של הכוח.

2.3.2 העבודה של כוח

כאשר בתנועה של חלקיק בין הזמן t_1 לזמן t_2 פועל על החלקיק כוח $\mathbf{f}(t)$, **העבודה**, W , של הכוח במשך התנועה מוגדרת על ידי

$$W = \int_{t_1}^{t_2} P(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{v}(t)dt.$$

ברור מהגדרה זו כי

$$P = \frac{dW}{dt}.$$

כזכור, הכוח $\mathbf{f}$ המופיע בהגדרה, אינו חייב להיות הכוח היחידי הפועל על החלקיק, או הכוח הגורם לתנועה הנתונה. מהגדרת המהירות נובע כי

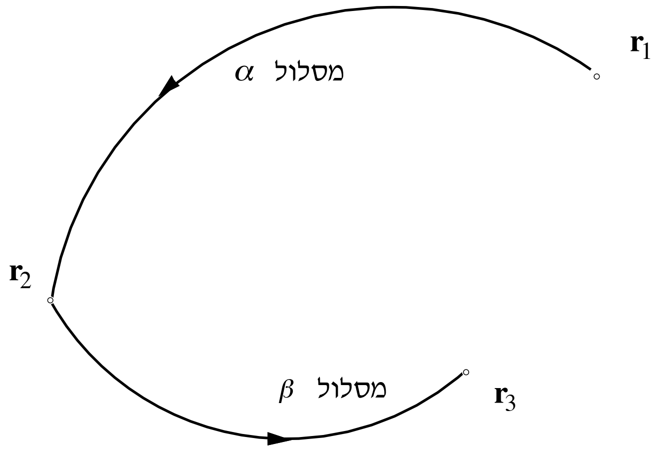
$$\mathbf{v}dt = \frac{d\mathbf{r}}{dt}dt = d\mathbf{r},$$

ולכן ניתן להחליף את המשתנים במשוואה בה מוגדרת העבודה

$$W = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r},$$

כאשר, $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t_1)$, $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}(t_2)$. אנו למדים מכך כי העבודה אינה תלויה במהירות בה החלקיק עובר את המסלול.

לעיתים קרובות נוסיף לסימון העבודה מציין תחתי שיסמן את שם המסלול שלאורכו מתבצעת העבודה. למשל, בתרשים 9 מסומן מסלול α מנקודה $\mathbf{r}_1$ לנקודה $\mathbf{r}_2$, ומסלול β מנקודה $\mathbf{r}_2$ לנקודה $\mathbf{r}_3$. העבודה שיבצע כוח בתנועה לאורך המסלולים הללו תסומן לכן על ידי W_α ו-W_β, בהתאמה. באופן דומה נסמן על ידי $-\alpha$ את המסלול שלאורך אותה עקומה כמו המסלול α אך מגמתו הפוכה, כלומר, נקודת המוצא שלו היא $\mathbf{r}_2$ ונקודה הסיום היא $\mathbf{r}_1$. אנו שמים לב לכך שאם החלקיק נע על אותו המסלול אולם נקודת המוצא שלו היא $\mathbf{r}_2$ ונקודה הסיום היא $\mathbf{r}_1$, אזי הסימן של $d\mathbf{r}$ בביטוי עבור העבודה מתהפך. אם כן, $W_{-\alpha} = -W_\alpha$. כמו-כן ברור שאם החלקיק נע על מסלול α מנקודה $\mathbf{r}_1$ לנקודה $\mathbf{r}_2$, ואחר כך הוא נע על מסלול β מנקודה $\mathbf{r}_2$ לנקודה $\mathbf{r}_3$, העבודה שהכוח יבצע עבור התנועה מהנקודה $\mathbf{r}_1$ לנקודה $\mathbf{r}_3$ דרך המסלול המשולב מהמסלולים α ו-β, תהיה סכום העבודות עבור המסלולים α ו-β (ראה תרשים 9). מכאן, אם נסמן על ידי $\alpha+\beta$ את המסלול המורכב מהמסלול α ואחר כך β, ונסמן על ידי $W_{\alpha+\beta}$ את העבודה שנעשית על ידי הכוח בזמן התנועה במסלול זה, אזי ניתן לרשום $W_{\alpha+\beta} = W_\alpha + W_\beta$.



תרשים 9

בקואורדינטות קרטזיות יהיה הביטוי עבור העבודה

בקואורדינטות קרטזיות יהיה הביטוי עבור העבודה

$$W = \int_{x_1}^{x_2} f_x dx + \int_{y_1}^{y_2} f_y dy + \int_{z_1}^{z_2} f_z dz ,$$

ובקואורדינטות מסלול נקבל את הביטוי הפשוט

$$W = \int_{s_1}^{s_2} f_t ds .$$

2.3.3 דוגמה

חלקיק נע במישור בתנועה $\mathbf{r} = c\cos t\mathbf{i} + c\sin t\mathbf{j}$, כלומר, הוא נע במישור במעגל ברדיוס c מטרים ומשלים סיבוב שלם במשך 2π שניות. על החלקיק פועל הכוח

$$\mathbf{f} = \frac{-ye}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{i} + \frac{xe}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{j} .$$

מצא את העבודה הנעשית על ידי הכוח במשך סיבוב שלם של החלקיק.

פתרון: מהתנועה הנתונה משתמע כי $x = c\cos t$, $y = c\sin t$. הצבת ביטויים אלו לביטוי עבור הכוח ושימוש ב- $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, תיתן $\mathbf{f} = -e\sin t\mathbf{i} + e\cos t\mathbf{j}$. מגזירת התנועה הנתונה, $\mathbf{v} = -c\sin t\mathbf{i} + c\cos t\mathbf{j}$, ולכן, $P = \mathbf{f}\cdot\mathbf{v} = ec(\sin^2 t + \cos^2 t) = ec$. העבודה שהכוח יבצע תהיה אם כן

$$W = \int_{t=0}^{t=2\pi} ce\,dt = 2\pi ce .$$

2.3.4 אנרגיה קינטית של חלקיק

האנרגיה הקינטית T של חלקיק שמהירותו $\mathbf{v}$ ומסתו m מוגדרת על ידי הביטוי

$$T = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} .$$

2.3.5 משפט העבודה והאנרגיה הקינטית

על ידי גזירת הביטוי שמגדיר את האנרגיה הקינטית, נקבל

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= \tfrac{1}{2}m(\dot{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}}) \\ &= m\mathbf{a}\cdot\mathbf{v} \\ &= \left(\sum \mathbf{f}\right)\cdot\mathbf{v} ,\end{aligned}$$

כאשר בשורה השניה השתמשנו בסימטריה של המכפלה הסקלרית ובהגדרת התאוצה ובשורה השלישית השתמשנו בחוק השני של ניוטון. אנו מסיקים מחישוב זה את הכלל: **קצב שינוי האנרגיה הקינטית של חלקיק שווה להספק של שקול הכוחות הפועלים עליו.** מהקשר

$$P = \frac{dW}{dt}$$

בין העבודה וההספק נובע כי

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dW}{dt} ,$$

ולכן $T = W + c$. הקבוע c , הוא כמובן ערך האנרגיה הקינטית כאשר העבודה מתאפסת. עבור תנועת חלקיק מהמקום $\mathbf{r}_1$ למקום $\mathbf{r}_2$, העבודה מתאפסת במצב ההתחלתי, ולכן $c = T_1 = \tfrac{1}{2}mv_1^2$. אנו מסיקים אם כן כי

$$\boxed{T_2 - T_1 = W}$$

או במפורש

$$\boxed{\tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2 = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2}\left(\sum \mathbf{f}\right)\cdot d\mathbf{r} = \int_{s_1}^{s_2}\sum f_t ds} \, .$$

המשוואה האחרונה היא הביטוי המתמטי למשפט העבודה והאנרגיה, ואותו נוכל לנסח במילים באופן הבא: **השינוי באנרגיה הקינטית בין שני מצבים של חלקיק שווה לעבודת שקול הכוחות במשך התנועה בין שני המצבים**.

ברור כי עיקרון זה נובע מהחוק השני של ניוטון ואינו מכיל כל אינפורמציה נוספת. מכיוון שבפיתוח החוק בצענו אינטגרציה, הוא מביע שלב ראשון בפתרון משוואת התנועה לקבלת תלות המקום בזמן, בכך, שהוא מאפשר את קבלת תלות המהירות במקום החלקיק. הגישה שהיצגנו הינה אנלוגית לגישה שהוצגה בסעיף 2.2.7. באותו סעיף קיבלנו

$$\tfrac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \tfrac{1}{2}m\dot{x}_1^2 = \int_{x_1}^{x_2}\sum f_x dx$$

וכמובן ניתן לקבל ביטויים אנלוגיים עבור הכיוונים האחרים,

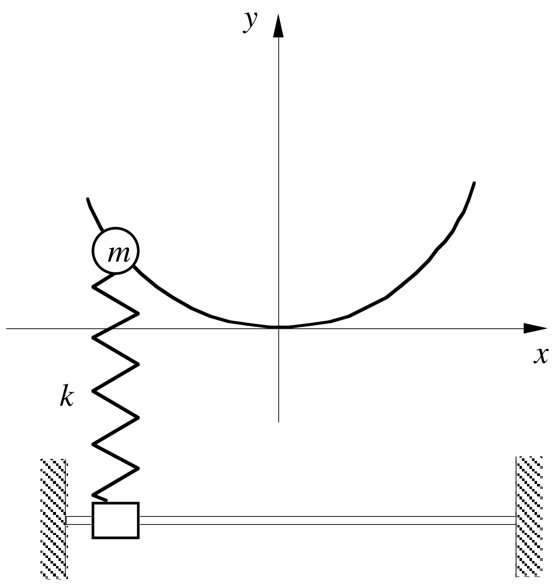
$$\tfrac{1}{2}m\dot{y}_2^2 - \tfrac{1}{2}m\dot{y}_1^2 = \int_{y_1}^{y_2}\sum f_y dy$$

$$\tfrac{1}{2}m\dot{z}_2^2 - \tfrac{1}{2}m\dot{z}_1^2 = \int_{z_1}^{z_2}\sum f_z dz \, .$$

משפט העבודה והאנרגיה הקינטית מתקבל על ידי סיכום שלוש המשוואות האחרונות. למעשה, ניתן אף לקבל את עקרון העבודה והאנרגיה הקינטית מיד, כאשר אנו מטפלים על ידי אותה גישה ברכיב המשיקי של החוק השני של ניוטון: $\sum f_t = m\ddot{s}$.

2.3.6 דוגמה

חלקיק בעל מסה m נע על גבי מוליך חלק הנתון על ידי המשוואה $y = bx^2$ ונתון להשפעתו של קפיץ אנכי בעל קשיחות k, אשר נמצא במצב חופשי כאשר $y = 0$ (ראה תרשים 10). מטרת המוליך התחתון היא להבטיח שהקפיץ אכן יהיה אנכי במשך התנועה. החלקיק משוחרר מגובה y_0 במצב מנוחה. דרוש לחשב את מהירות החלקיק בהגיעו לתחתית המסלול.



תרשים 10

פתרון: נשתמש במשפט העבודה והאנרגיה. על החלקיק פועלים כוח הקפיץ והכוח שמפעיל עליו המוליך. מכיון שהמוליך חלק, הוא מפעיל על החלקיק כוח בכיוון ניצב למוליך. אנו מסיקים מכך כי הכוח שהמוליך מפעיל על החלקיק ניצב למהירות בכל נקודה ונקודה, ולכן אינו מבצע עבודה. הכוח שמפעיל הקפיץ הוא $\mathbf{f} = -ky\mathbf{j}$, ולכן, בהתחשב בכך שהאנרגיה הקינטית ההתחלתית מתאפסת אנו מקבלים

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}mv^2 &= \int_{x_1}^{x_2} f_x dx + \int_{y_1}^{y_2} f_y dy \\ &= \int_{y_0}^{0} -ky dy \\ &= \tfrac{1}{2}ky_0^2\end{aligned} .$$

המהירות הסופית תהיה לכן $v = \sqrt{\frac{k}{m}}y_0$.

2.3.7 כוחות משמרים

אנו אומרים שכוח הפועל על חלקיק הוא **כוח משמר** אם תלות הכוח במקום היא כזו שהעבודה שמבצע הכוח כאשר החלקיק נע במסלול סגור, מתאפסת. כלומר, העבודה מתאפסת אם נקודת הסיום של המסלול מתלכדת עם נקודת המוצא. על ידי שימוש בסימן האינטגרל סביב מסלול סגור אנו אם כן רושמים עבור כוח משמר

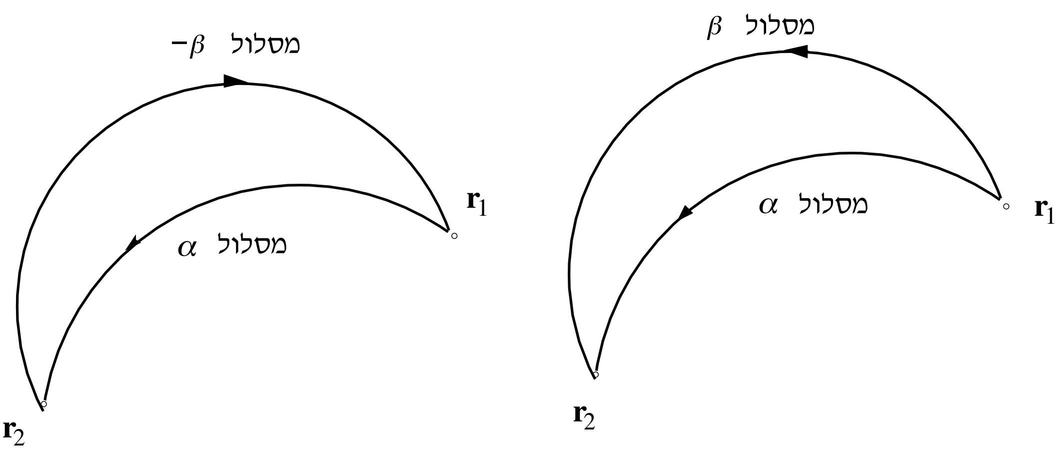
$$\oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = 0 .$$

שים לב לכך שבדוגמה 2.3.3, העבודה, שנעשתה על ידי הכוח כאשר החלקיק חזר למקומו המקורי, לא התאפסה, ולכן הכוח המתואר בדוגמה אינו כוח משמר.

טענה: העבודה שנעשית על ידי כוח משמר במעבר מנקודה $\mathbf{r}_1$ לנקודה $\mathbf{r}_2$ אינה תלויה במסלול בו אנו עוברים בין שתי הנקודות.

הוכחה: נניח שאנו עוברים מנקודה $\mathbf{r}_1$ לנקודה $\mathbf{r}_2$ דרך שני מסלולים שונים: α ו-β (ראה תרשים 11). המסלול $\alpha+(-\beta)$ הוא מסלול סגור בו אנו עוברים קודם דרך המסלול α ואחר כך חוזרים במסלול ההפוך למסלול β. מכאן,

$$\begin{aligned} W_\alpha - W_\beta &= W_\alpha + W_{-\beta} \\ &= W_{\alpha+(-\beta)} = 0 \end{aligned},$$



תרשים 11

כאשר בשורה הראשונה השתמשנו בכלל עבור העבודה במסלול ההפוך מסעיף 2.3.2, בשורה השניה השתמשנו בכלל עבור המסלול המורכב משני מסלולים מאותו סעיף ובשורה השלישית השתמשנו בעובדה שהכוח משמר.

אם נתון לנו הכוח הפועל על חלקיק בכל נקודה במרחב בה הוא עשוי להמצא, ואם כוח זה הינו כוח משמר, אנו יכולים לציין את העבודה במעבר מהנקודה A לנקודה B על ידי W_{AB}. מספיק לציין רק את נקודות הקצה, מפני שעבור כוח משמר, העבודה אינה תלויה במסלול המחבר אותן.

2.3.8 אנרגיה פוטנציאלית

כאשר נתון כוח משמר כמתואר בפיסקה הקודמת, ואנו בוחרים נקודה O שתשמש לנו כנקודת ייחוס, אנו יכולים לסמן את העבודה, שמתבצעת במעבר מהנקודה O לנקודה אחרת כלשהי A, על ידי W_A. אנו משמיטים אם כן את ציון נקודת הייחוס O ומגדירים

$$W_A = W_{OA}.$$

נדגיש שוב, שברגע שהנקודה O נבחרה, המספר W_A תלוי אך ורק בנקודה A. נגדיר את **האנרגיה הפוטנציאלית**, U, של הכוח המשמר, כפונקציה סקלרית של המקום במרחב אשר ערכה בנקודה A הוא $-W_A$, כלומר,

$$U_A = U(A) = -W_A = -W_{OA} = W_{AO}.$$

אם כן, האנרגיה הפוטנציאלית בנקודה A היא העבודה של הכוח כאשר החלקיק עובר מהנקודה A לנקודת הייחוס O.

מכיון שעבודת הכוח במעבר מנקודה A לנקודה B אינה תלויה במסלול, אנו יכולים לרשום: $W_{AB} = W_{AO} + W_{OB}$, ובשימוש הגדרת האנרגיה הפוטנציאלית

$$\boxed{W_{AB} = U_A - U_B\,.}$$

2.3.9 האנרגיה הפוטנציאלית של כוח הכובד

עבור רוב החישובים ההנדסיים ניתן להניח שכוח הכובד הפועל על חלקיק בעל מסה m הוא בשיעור mg כאשר $g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$, וכיוונו הוא בכיוון הפוך לכיוון z, כלומר $\mathbf{f} = -mg\mathbf{k}$. העבודה שמבצע כוח הכובד במעבר מהנקודה $\mathbf{r}_1$ לנקודה $\mathbf{r}_2$ תהיה

$$\begin{aligned} W &= \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} -mgdz \\ &= mg(z_1 - z_2)\,, \end{aligned}$$

כאשר z_1 ו-z_2 הן הקואורדינטות z של נקודת המוצא והנקודה הסופית. אנו רואים שעבודת כוח הכובד אינה תלויה במסלול אלא בנקודות הקצה בלבד ומכאן הכוח משמר. אם נקודת הייחוס היא ראשית מערכת הצירים אזי $U(A) = W_{AO} = mg(z_A - z_O)$, ולכן

$$U(A) = mgz_A\,.$$

2.3.10 האנרגיה הפוטנציאלית של קפיץ

נניח שהכוח הפועל על חלקיק נתון על ידי המשוואה $\mathbf{f} = -k\mathbf{r}$, כאשר k קבוע נתון, $\mathbf{r}$ הוא וקטור המקום של החלקיק יחסית לראשית נתונה. במקרה זה העבודה הנעשית על ידי הכוח במעבר מנקודה $\mathbf{r}_1$ לנקודה $\mathbf{r}_2$ תהיה

$$\begin{aligned} W &= \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} \\ &= -k\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} (xdx + ydy + zdz) \\ &= -\tfrac{1}{2}k\left[\left(x_2^2 - x_1^2\right) + \left(y_2^2 - y_1^2\right) + \left(z_2^2 - z_1^2\right)\right] \\ &= \tfrac{1}{2}kr_1^2 - \tfrac{1}{2}kr_2^2\,, \end{aligned}$$

כאשר העובדה שהאיברים השונים בשורה השניה כללו משתנה אחד כל אחד, אפשרה לנו לבצע את האינטגרציה באופן בלתי תלוי במסלול. אם נבחר את נקודת הייחוס להיות בראשית הצירים, נקבל $U(A) = W_{AO} = \frac{1}{2}kr_A^2 - \frac{1}{2}kr_O^2$, ומכיון ש-$r_O = 0$,

$$U(A) = \tfrac{1}{2}kr_A^2 \, .$$

2.3.11 חוק שימור האנרגיה המכנית עבור כוחות משמרים

מעיקרון העבודה והאנרגיה הקינטית שהוכחנו בסעיף 2.3.4, $W_{AB} = T_B - T_A$, ובשימוש הביטוי האחרון שקיבלנו בסעיף הקודם ,אם הכוח הינו משמר: $T_B - T_A = U_A - U_B$. מכאן, עבור כל שתי נקודות על מסלול של חלקיק הנע בהשפעת כוח משמר,

$$\boxed{U_A + T_A = U_B + T_B \, .}$$

כלומר, האנרגיה המכנית הכללית, שהיא סכום האנרגיה הקינטית והאנרגיה הפוטנציאלית, נשמרת קבועה.

פרק 3: דינמיקה של מערכת חלקיקים

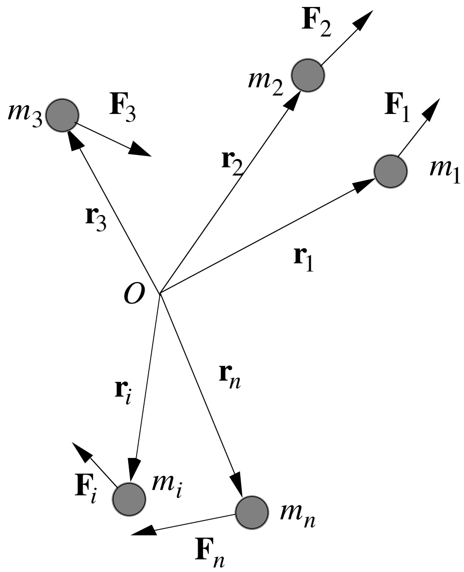
3.0 מבוא

כאשר אנו מעוניינים לנתח את התנועה של מערכת המורכבת ממספר חלקיקים המפעילים כוחות זה על זה, עלינו לרשום עבור כל חלקיק וחלקיק את משוואות התנועה שלו כפי שעשינו בפרק הקודם. במשוואות אלו, הכוח השקול הפועל על חלקיק, יכול להיות תלוי במקומם של חלקיקים אחרים. לדוגמה, אם החלקיקים השונים מחוברים ביניהם באמצעות קפיצים, ברור שמקומותיהם של החלקיקים, המחוברים לחלקיק מסוים דרך קפיצים, יקבעו את הכוח על אותו חלקיק. דוגמה נוספת יכול לספק כוח המשיכה בין מסות הקובע את תנועת גרמי השמים. פתרון תנועת מערכת חלקיקים אינו מעשי ברוב המקרים. הבעיה של תנועת חלקיקים תחת כוח משיכת המסות אינה פתורה אפילו עבור מספר מועט מאוד של חלקיקים.

פרק זה מכיל מספר חוקים שנועדו לעזור לנו לחשב גדלים מסוימים עבור תנועת מערכת החלקיקים אף אם לא את מיקומם של החלקיקים הבודדים. בעזרת חוקים אלו נוכל למשל ללמוד על תנועת מרכז המסה והגורמים המשפיעים עליה. נראה שחלק מהכוחות הפועלים במערכת החלקיקים, אינם חשובים לצורך חישוב תנועת מרכז המסה. חוקי התנועה שנילמד בפרק זה חשובים גם מפני שהם ישמשו אותנו בפרק 5 כחוקי התנועה עבור גופים קשיחים.

3.1 הגדרות והנחות יסוד

3.1.1 הגדלים הבסיסיים הקשורים במערכת חלקיקים



תרשים 1

מערכת חלקיקים טיפוסית בה נעסוק תהיה מורכבת מ-n חלקיקים. אנו נמספר את החלקיקים מ-1 ועד n, ונתייחס לגודל כלשהו הקשור בחלקיק ה-i של מערכת החלקיקים, $i = 1,2,..n$, על ידי סימון אותו גודל במציין תחתי i. לדוגמה, $\mathbf{r}_i$ יציין את וקטור המקום של החלקיק ה-i, $\mathbf{v}_j = \dot{\mathbf{r}}_j$ יסמנו את המהירות של החלקיק ה-j ו-$\mathbf{F}_k$ יסמן את השקול של הכוחות הפועלים על החלקיק ה-k (ראה תרשים 1). שים לב, בפרק זה נשתמש רק ב-$\mathbf{F}$ (אות גדולה) לסמן את הכוח השקול הפועל על חלקיק, והאות $\mathbf{f}$ (אות קטנה), תשמש אותנו לצורך אשר יתואר בהמשך.

3.1.2 ההנחות עבור מערכת הכוחות על החלקיקים

המסקנות והחוקים העיקריים, אותם נקבל בפרק זה, מבוססים על מספר הנחות יסודיות של המכניקה הקלאסית שנפרט להלן.

ההנחה הראשונה היא שהכוח השקול על חלקיק כלשהו, מורכב משני סוגי כוחות: כוחות חיצוניים אשר מופעלים על ידי עצמים או שדות, שמחוץ למערכת החלקיקים, וכוחות פנימיים שהחלקיקים האחרים במערכת מפעילים על החלקיק. הכוח השקול על חלקיק הוא הסכום של הכוחות הפנימיים והחיצוניים הפועלים עליו.

אנו נסמן על ידי $\mathbf{f}_i$ את שקול הכוחות החיצוניים הפועלים על החלקיק ה-i, ועל ידי $\mathbf{f}_{ij}$ את הכוח שהחלקיק מספר j מפעיל על החלקיק מספר i. בהתאם לסימון זה, ניתן לרשום את ההנחה הראשונה בצורה

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{f}_i + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{f}_{ij}$$

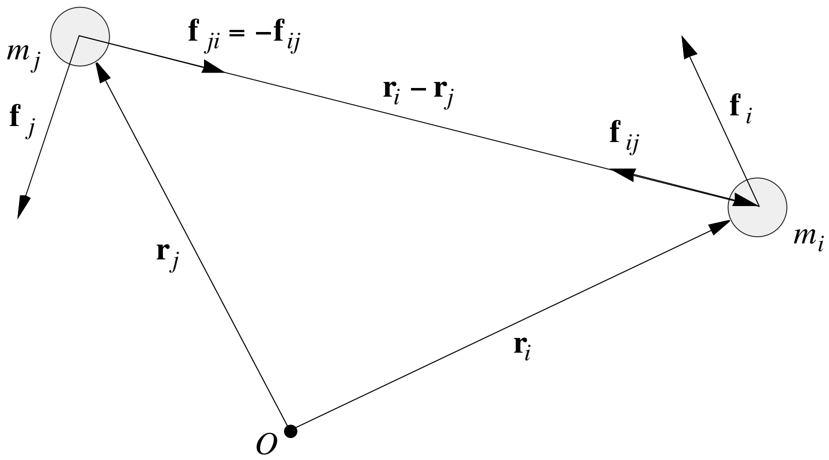
כאשר לצורך פשטות הסימון, אנו מגדירים את $\mathbf{f}_{ii}$ כוקטור האפס, וכך אנו אנו מסכמים את הכוחות הפנימיים עבור כל הערכים האפשריים של j (כולל i).

ההנחה השניה היא שהכוח שהחלקיק ה-i מפעיל על החלקיק ה-j, שווה בגודלו לכוח שהחלקיק ה-j מפעיל על החלקיק ה-i, והפוך לו בכיוונו. כלומר, סכומם של הכוחות ההדדיים בין כל זוג חלקיקים מתאפס, ובמפורש:

$$\mathbf{f}_{ij} = -\mathbf{f}_{ji} \,.$$

ההנחה השלישית היא שקו הפעולה של הכוח שהחלקיק ה-i מפעיל על החלקיק ה-j, מתלכד עם הישר עליו נמצאים שני החלקיקים (ראה תרשים 2 בו מוצגים הכוחות על החלקיק ה-i והחלקיק ה-j בהתאם להנחות שעשינו). נובע מכך שהווקטור $\mathbf{f}_{ij}$ מקביל לוקטור $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$, ולכן

$$(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{f}_{ij} = \mathbf{0} \,.$$



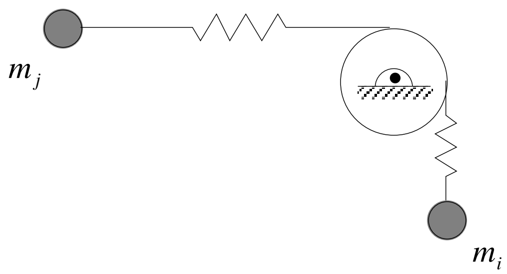
תרשים 2

אנו שמים לב לכך ששקול המומנטים שיוצרים זוג הכוחות הפנימיים $\mathbf{f}_{ij}$ ו-$\mathbf{f}_{ji}$ מתאפס. מכיון שקו הפעולה המשותף להם עובר דרך החלקיק m_i למשל, המומנט שהם יוצרים יחסית ל-m_i מתאפס. שני הכוחות יוצרים צמד כוחות, ולכן, המומנט שהם יוצרים לא תלוי בנקודת הייחוס - הוא מתאפס ביחס לנקודה כלשהי. באופן פורמלי

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{f}_{ji} &= \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij} - \mathbf{r}_j \times \mathbf{f}_{ij} \\ &= (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{f}_{ij} \\ &= \mathbf{0} \end{aligned} .$$

כאשר בשורה הראשונה השתמשנו בהנחה השניה עבור הכוחות במערכת חלקיקים, ובשורה השלישית השתמשנו בהנחה השלישית. לסיכום, אם נסמן על ידי $\mathbf{m}_{ij}$ את המומנט של הכוח $\mathbf{f}_{ij}$, כלומר $\mathbf{m}_{ij} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij}$, אזי

$$\mathbf{m}_{ij} + \mathbf{m}_{ji} = \mathbf{0} .$$



תרשים 3

במקרים בהם ההנחות הנדונות אינן תופסות, יהיה עלינו להתייחס לכוחות ההדדיים כאל כוחות חיצוניים, ולהכניס אותם לחישוב שקול הכוחות והמומנטים. לדוגמה, הכוחות שמפעילים החלקיקים המתוארים בתרשים 3 על ידי הקפיצים בהם הם מחוברים, יהיו בכיוונים של הקפיצים ולא בכיוון הישר עליו נמצאים החלקיקים. החלוקה לכוחות חיצוניים וכוחות הדדיים צריכה אם כן להעשות בהתאם למקרה בו אנו עוסקים. בהמשך, נניח שהכוחות בין החלקיקים המרכיבים גוף קשיח, הם אכן בהתאם להנחות שפורטו בסעיף זה.

3.1.3 שקול הכוחות הפועלים על מערכת חלקיקים

בבואנו לחשב את השקול של מערכת הכוחות הפועלים על החלקיקים השונים, עלינו לסכם את כל הכוחות הפועלים על כל החלקיקים. קל לראות, שבסכום זה הכוחות הפנימיים מתאפסים בזוגות, משום שעבור כל שני חלקיקים i ו-j, $\mathbf{f}_{ji}+\mathbf{f}_{ij}=\mathbf{0}$. כדי להציג זאת באופן פורמלי, אנו שמים לב ראשית לעובדה שסכום הכוחות הפנימיים נתון על ידי סכום כפול

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\mathbf{f}_{ij}\right)=\sum_{i,j=1}^{n}\mathbf{f}_{ij}.$$

הסכום על המציין j נותן את סכום הכוחות הפנימיים הפועלים על החלקיק ה-i, והסכום עבור כל הערכים של i נותן את סכום הכוחות הפנימיים הפועלים על כל החלקיקים. עבור הסכום הכפול ניתן לרשום

$$\sum_{i,j=1}^{n}\mathbf{f}_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\left(\mathbf{f}_{ij}+\mathbf{f}_{ji}\right)$$

כאשר בסכום הכפול באגף ימין אנו מסכמים רק עבור המקרה בו $i>j$, ומפצים על השמטת האיברים בהם המציין הראשון קטן מהמציין השני, על ידי הוספת האיברים $\mathbf{f}_{ji}$ לסכום. (האיברים בהם שני המציינים זהים מתאפסים כי הם מסמלים כוחות שחלקיקים מפעילים על עצמם.) מההצגה של הסכום כמו באגף ימין של המשוואה האחרונה, ברור, כי ההנחה השניה גוררת את התאפסות הסכום הכפול של הכוחות הפנימיים.

מהתאפסות שקול הכוחות הפנימיים אנו מסיקים שעבור מערכת הכוחות הפועלים על החלקיקים

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}_i&=\sum_{i=1}^{n}\left[\mathbf{f}_i+\sum_{j=1}^{n}\mathbf{f}_{ij}\right]\\&=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{f}_i+\sum_{i,j=1}^{n}\mathbf{f}_{ij}\\&=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{f}_i\end{aligned}$$

כאשר השתמשנו בהתאפסות הסכום הכפול בשורה השלישית. כלומר, **שקול מערכת הכוחות שווה לשקול הכוחות החיצוניים**.

3.1.4 שקול המומנטים של הכוחות הפועלים על מערכת חלקיקים

בדומה לחישוב עבור שקול הכוחות, גם בחישוב עבור שקול המומנטים של מערכת הכוחות הפועלים על מערכת החלקיקים, יתאפס סכום המומנטים של הכוחות הפנימיים. שקול המומנטים יכיל איפוא רק את המומנטים של הכוחות החיצוניים. הדבר נובע מכך שהמומנטים של הכוחות הפנימיים יתאפסו בזוגות, כפי שהראינו בסוף סעיף 3.1.2.

אנו נציג זאת באופן פורמלי בצורה אנלוגית לסעיף הקודם על ידי בחינה של הסכום הכפול

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\mathbf{m}_{ij}\right)=\sum_{i,j=1}^{n}\mathbf{m}_{ij},$$

שבו הסכום על המציין j מייצג את סכום המומנטים של הכוחות הפנימיים הפועלים על החלקיק ה-i, והסיכום על המציין i ייתן את שקול המומנטים של הכוחות הפנימיים. שוב אנו רושמים את הסכום הכפול בצורה

$$\sum_{i,j=1}^{n}\mathbf{m}_{ij}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\left(\mathbf{m}_{ij}+\mathbf{m}_{ji}\right),$$

בה פיצינו על השמטת האיברים בסכום הכפול בהם המציין הראשון קטן מהמציין השני, על ידי כתיבתם באופן מפורש. מהצגה זו ברור כי הסכום הכפול מתאפס. נובע מכך כי

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{r}_i\times\mathbf{F}_i &= \sum_{i=1}^{n}\mathbf{r}_i\times\left[\mathbf{f}_i+\sum_{j=1}^{n}\mathbf{f}_{ij}\right]\\ &= \sum_{i=1}^{n}\mathbf{r}_i\times\mathbf{f}_i+\sum_{i,j=1}^{n}\mathbf{r}_i\times\mathbf{f}_{ij}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\mathbf{r}_i\times\mathbf{f}_i+\sum_{i,j=1}^{n}\mathbf{m}_{ij}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\mathbf{r}_i\times\mathbf{f}_i\end{aligned}$$

כלומר, **שקול המומנטים של הכוחות הפועלים במערכת חלקיקים שווה לשקול המומנטים של הכוחות החיצוניים**.

3.1.5 מרכז המסה

וקטור המקום, $\mathbf{r}_c$, של מרכז המסה של מערכת חלקיקים מוגדר על ידי הביטוי

$$\mathbf{r}_c=\frac{\sum_{i=1}^{n}\mathbf{r}_i m_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}.$$

מרכז המסה הוא כמובן נקודה חסרת משמעות חומרית, ומרכז המסה של גוף (או מערכת חלקיקים) אינו חייב להיות בתוך הגוף. כאשר הגוף או מערכת החלקיקים נמצאת בתנועה, מרכז המסה נמצא בתנועה גם כן. אנו נשתמש בביטויים כמו: **תנע של מרכז המסה** עבור הוקטור $m\dot{\mathbf{r}}_c$, ו**האנרגיה הקינטית של מרכז המסה** עבור $\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}_c^2$, כאשר

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

היא המסה הכללית של המערכת. כאמור, מרכז המסה הוא נקודה דימיונית חסרת מסה, תנע או אנרגיה קינטית, והביטויים הנזכרים נועדו לקיצור בלבד. ביטויים אלו יוצרים אנלוגיה בין תנועת מערכת החלקיקים לתנועת חלקיק, שמסתו כמסה הכללית, ואשר תנועתו היא תנועת מרכז המסה.

בסטטיקה, מרכז הכובד מוגדר כמקום בו יש להציב את שקול כוחות הכובד על החלקיקים השונים, בכדי שיצור את המומנט השקול של כוחות הכובד הפועלים על החלקיקים. כלומר, אם נסמן את המשקל של החלקיק ה- i על ידי $\mathbf{w}_i$, ואת המשקל הכולל על ידי $\mathbf{w}$, אזי

$$\mathbf{r}_c \times \mathbf{w} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{w}_i \;.$$

אם כוח הכובד פועל בכיוון z, אזי $\mathbf{w}_i = m_i g\mathbf{k}$, ולכן

$$\mathbf{r}_c \times mg\mathbf{k} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times m_i g\mathbf{k}$$

$$mg\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_c & y_c & z_c \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} m_i g\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_i & y_i & z_i \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$mg(y_c\mathbf{i} - x_c\mathbf{j}) = \sum_{i=1}^{n} m_i g(y_i\mathbf{i} - x_i\mathbf{j}) \;.$$

על ידי השוואת הרכיבים משני צידי משוואה זו וצמצומה ב- g, נקבל

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{m}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{m} \;.$$

אם נסובב את מערכת הצירים יחד עם מערכת החלקיקים, כך שכוח הכובד יפעל עתה בכיוון אחר, למשל y, נקבל בנוסף לביטוי עבור x_c גם,

$$z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{m} \;.$$

אנו מסיקים כי, מרכז הכובד כפי שמוגדר בסטטיקה, מתלכד עם מרכז המסה כפי שהגדרנו למעלה.

3.2.1 התנע הקווי של מערכת חלקיקים

התנע הקווי $\mathbf{p}$ של מערכת חלקיקים מוגדר כסכום וקטורי התנע של החלקיקים המרכיבים את המערכת, כלומר,

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \ .$$

מהגדרת מרכז המסה נובע כי $m\mathbf{r}_c = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i$, ועל ידי גזירה של ביטוי זה, נקבל

$$m\dot{\mathbf{r}}_c = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{p} \ ,$$

כלומר, **התנע הקווי של מערכת החלקיקים שווה לתנע של מרכז המסה**.

3.2.2 משוואת התנועה של מרכז המסה

על ידי גזירת המשוואה האחרונה, אנו מקבלים

$$m\ddot{\mathbf{r}}_c = \sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{p}} \ .$$

מהחוק השני של ניוטון, נובע כי

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{f}_i \ ,$$

כאשר השוויון השני הוא על סמך הדיון בסעיף 3.1.3, בו הראינו כי סכום הכוחות החיצוניים שווה לסכום הכוחות על המערכת. מכאן,

$$\boxed{m\ddot{\mathbf{r}}_c = \dot{\mathbf{p}} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{f}_i \ .}$$

כלומר, **סכום הכוחות החיצוניים הפועלים על מערכת החלקיקים שווה למכפלת המסה הכללית בתאוצת מרכז המסה**, או במילים אחרות, לגבי תנועת מרכז המסה, המערכת מתנהגת כחלקיק בעל מסה m שעליו פועל שקול הכוחות החיצוניים.

3.2.3 התנע הזוויתי של מערכת חלקיקים

התנע הזוויתי $\mathbf{H}$ של מערכת חלקיקים מוגדר על ידי סכום וקטורי התנע הזוויתי של החלקיקים במערכת, כלומר

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i \ .$$

3.2.4 משוואת התנע הזוויתי עבור מערכת חלקיקים

על ידי גזירת הביטוי עבור התנע הזוויתי של מערכת החלקיקים, נקבל

$$\dot{\mathbf{H}} = \sum_{i=1}^{n} \dot{\mathbf{r}}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \quad .$$

כאשר בשורה הראשונה השתמשנו בכלל לנגזרת מכפלה, בשורה השניה השמטנו את הסכום הראשון משום שהוא כולל מכפלות וקטוריות של וקטורים ($\dot{\mathbf{r}}_i$) בעצמם, כן השתמשנו בשורה השניה בחוק השני של ניוטון. אנו מסיקים אם כן שקצב שינוי התנע הזוויתי שווה לשקול המומנטים של הכוחות על החלקיקים השונים. בסעיף 3.1.4 הראינו שלצורך חישוב שקול המומנטים מספיק לקחת את המומנטים של הכוחות החיצוניים $\mathbf{f}_i$ ולכן

$$\boxed{\dot{\mathbf{H}} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i \ .}$$

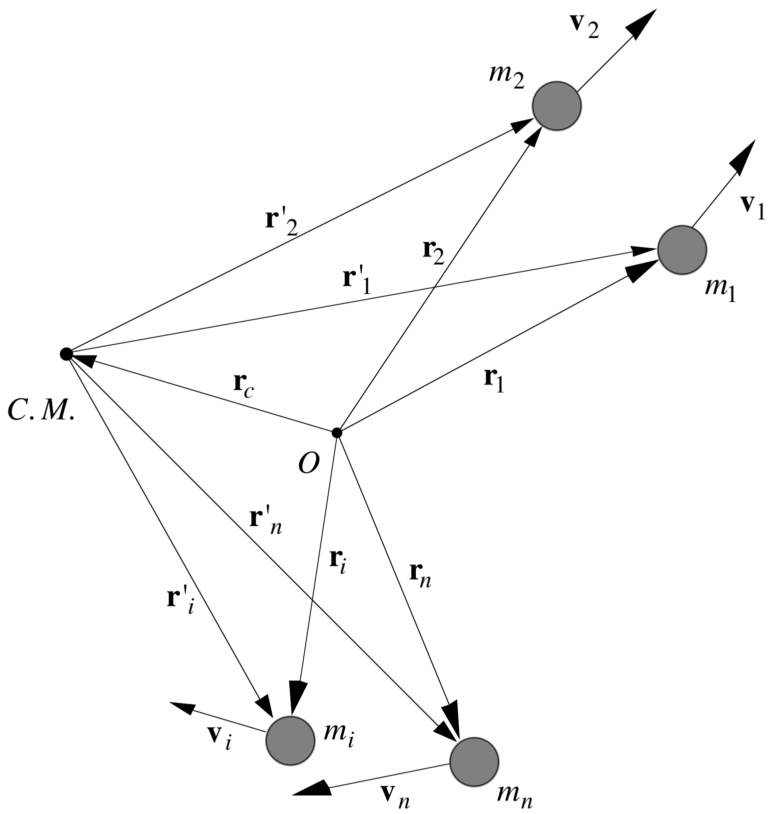
קיבלנו: **קצב שינוי התנע הזוויתי של מערכת חלקיקים שווה לשקול המומנטים של הכוחות החיצוניים הפועלים על המערכת**. ראוי לציין כי בעוד שבדינמיקה של חלקיק משוואת התנע הזוויתי נובעת ישירות מהחוק השני של ניוטון, ועקב כך היא אינה מספקת כל אינפורמציה נוספת לזו המתקבלת מהחוק השני, הרי בדינמיקה של מערכת חלקיקים, משוואת התנע הזוויתי מבוססת על ההנחות שעשינו לגבי הכוחות במערכת, והיא מספקת אינפורמציה נוספת לזו שמספקת משוואת התנועה של מרכז המסה.

3.2.5 התנע הזוויתי של מערכת חלקיקים יחסית למרכז המסה

אנו חופשיים לבחור את הראשית של המערכת אשר יחסית אליה אנו מחשבים את התנע והתנע הזוויתי של חלקיק או מערכת חלקיקים כרצוננו, כל עוד המערכת היא מערכת אינרציאלית. מערכת צירים שראשיתה צמודה למרכז המסה, אינה מערכת אינרציאלית באופן כללי, משום שמרכז המסה עשוי לנוע בתאוצה יחסית למערכת אינרציאלית. ניתן היה לצפות אם כן כי אין כל משמעות לחישוב התנע הזוויתי יחסית למערכת שראשיתה צמודה למרכז המסה. למרות זאת, מסתבר, כפי שנראה בהמשך, שיש משמעות לחישוב התנע הזוויתי יחסית למרכז המסה.

נסמן על ידי ציון בתג (') גדלים שמתייחסים למערכת שראשיתה נמצאת במרכז המסה (ראה תרשים 4). למשל, $\mathbf{r}'_i$ יסמן את וקטור המקום של החלקיק ה-i יחסית למרכז המסה, $\dot{\mathbf{r}}'_i = \mathbf{v}'_i$ יסמנו את המהירות של החלקיק יחסית למרכז המסה וכדומה. את התנע הזוויתי יחסית למרכז המסה נסמן באופן שונה מהמוסכם על ידי $\mathbf{H}_c$. כלומר,

$$\mathbf{H}_c = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}'_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}'_i \ .$$



תרשים 4

נקל לראות בתרשים כי $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_c + \mathbf{r}'_i$, לכן $\dot{\mathbf{r}}_i = \dot{\mathbf{r}}_c + \dot{\mathbf{r}}'_i$ וכיוצא בזה. בשימוש בביטויים אלו, התנע הזוויתי של המערכת יחסית למרכז המסה יהיה

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_c &= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}'_i \times m_i(\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_c) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}'_i \times m_i\dot{\mathbf{r}}_i - \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}'_i \times m_i\dot{\mathbf{r}}_c \qquad .\end{aligned}$$

ניתן כמובן להוציא את הוקטור $\dot{\mathbf{r}}_c$ מהסכום הימני בשורה התחתונה. הסכום שנישאר

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{r}'_i \ ,$$

מביע, על סמך הגדרת מרכז המסה, את מכפלת המסה הכללית ברדיוס הווקטור אל מרכז המסה. כלומר,

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{r}'_i = m\mathbf{r}'_c \ ,$$

כאשר $\mathbf{r}'_c$ הוא וקטור המקום של מרכז המסה במערכת שראשיתה במרכז המסה, ולכן הוא כמובן מתאפס. קיבלנו

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}'_i = \mathbf{0} .$$

בהצבת האפס לביטוי עבור התנע הזוויתי במערכת שראשיתה במרכז המסה, מתקבל

$$\boxed{\mathbf{H}_c = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}'_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i .}$$

בהשוואת ביטוי זה לביטוי המקורי אנו מסיקים כי בחישוב התנע הזוויתי יחסית למרכז המסה אין זה משנה אם אנו משתמשים במהירות החלקיקים יחסית למרכז המסה ($\dot{\mathbf{r}}'_i$ בביטוי המקורי), או במהירות של החלקיקים יחסית למערכת אינרציאלית ($\dot{\mathbf{r}}_i$ בביטוי האחרון).

את הקשר בין התנע הזוויתי יחסית לראשית O, לבין התנע הזוויתי יחסית למרכז המסה, נמצא על ידי החישוב

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}'_i + \mathbf{r}_c) \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}'_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i + \mathbf{r}_c \times \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{r}}_i . \end{aligned}$$

כאשר בשורה השניה השתמשנו בקשר בין וקטורי המקום יחסית לראשית O ומרכז המסה. אנו שמים לב לכך שהסכום הראשון בשורה האחרונה, הוא התנע הזוויתי יחסית למרכז המסה, והסכום באיבר השני, הוא התנע הקווי של מערכת החלקיקים. מכאן

$$\boxed{\mathbf{H} = \mathbf{H}_c + \mathbf{r}_c \times \mathbf{p} = \mathbf{H}_c + \mathbf{r}_c \times m\mathbf{v}_c .}$$

3.2.6 משוואת התנע הזוויתי יחסית למרכז המסה

על ידי גזירת הביטוי

$$\mathbf{H}_c = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}'_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i ,$$

שקיבלנו בסעיף הקודם עבור התנע הזוויתי יחסית למרכז המסה, נקבל

$$\dot{\mathbf{H}}_c = \sum_{i=1}^{n} \dot{\mathbf{r}}'_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}'_i \times m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{r}}_c) \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \dot{\mathbf{r}}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i - \sum_{i=1}^{n} \dot{\mathbf{r}}_c \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i$$

$$= -\dot{\mathbf{r}}_c \times \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{r}}_i + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}'_i \times \mathbf{F}_i \quad ,$$

כאשר בשורה הראשונה השתמשנו בנגזרת של מכפלה, בשורה השניה השתמשנו בקשר בין $\dot{\mathbf{r}}'_i$ ל-$\mathbf{r}_i$ והחוק השני של ניוטון, ובשורה הרביעית לא רשמנו את הסכום של המכפלות הוקטוריות $\dot{\mathbf{r}}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i$ משום שהוא מתאפס. על סמך סעיף 3.2.1

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{r}}_i = m \dot{\mathbf{r}}_c \, ,$$

כלומר, המכפלה הוקטורית באיבר הראשון של הביטוי שקיבלנו עבור הנגזרת של התנע הזוויתי, היא מכפלה של $\dot{\mathbf{r}}_c$ בעצמו ולכן היא מתאפסת. האיבר השני מביע את שקול המומנטים של הכוחות על החלקיקים יחסית למרכז המסה (משום שזרוע הכוח היא $\mathbf{r}'_i$ ולא $\mathbf{r}_i$). שוב, אנו רשאים להחליף את שקול כל הכוחות בשקול הכוחות החיצוניים בלבד, על סמך סעיף 3.1.4. קיבלנו איפוא: **קצב שינוי התנע הזוויתי יחסית למרכז המסה שווה לשקול המומנטים של הכוחות החיצוניים יחסית למרכז המסה.** אם נסמן על ידי $\sum \mathbf{M}_c$ את שקול המומנטים של הכוחות החיצוניים יחסית למרכז המסה, הכלל שקיבלנו הוא

$$\boxed{\sum \mathbf{M}_c = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}'_i \times \mathbf{f}_i = \dot{\mathbf{H}}_c \, .}$$

אנו מסיקים מכלל זה, שעל אף העובדה שהמערכת הצמודה למרכז המסה אינה מערכת אינרציאלית, החוק של שוויון נגזרת התנע הזוויתי ושקול המומנטים עדיין תופס עבורה.

3.2.7 פתרון המשוואה הוקטורית $\mathbf{a} \times \mathbf{u} = \mathbf{b}$

בסעיף הבא ובמקומות אחרים נצטרך לפתור את המשוואה הוקטורית $\mathbf{a} \times \mathbf{u} = \mathbf{b}$, או

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} = b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k} \, ,$$

שבה נתונים הוקטורים $\mathbf{a}$ ו-$\mathbf{b}$ והוקטור $\mathbf{u}$ נעלם. במשוואה מסוג זה נתקלים גם בסטטיקה, כאשר נתון המומנט שכוח נתון צריך ליצור, ומחפשים את המקום שבו צריך הכוח לפעול, בכדי ליצור את המומנט הנדרש. במקרה זה המשוואה היא $\mathbf{r} \times \mathbf{f} = \mathbf{M}$ כאשר $\mathbf{r}$ הוא הוקטור הנעלם.

על ידי פיתוח הדטרמיננטה והשוואת רכיבים נקבל שלוש משוואות עבור שלושת הרכיבים u_x, u_y, u_z של הווקטור הנעלם. משוואות אלו הן

$$\begin{aligned} & -a_z u_y && +a_y u_z && = b_x \\ a_z u_x & && -a_x u_z && = b_y \\ -a_y u_x & +a_x u_y && && = b_z \end{aligned} .$$

לכאורה די לנו במשוואות אלו לצורך קביעת הנעלמים, אך למעשה המשוואות הללו אינן בלתי תלויות, ולא ניתן לקבל את שלושת הנעלמים מהן. בסטטיקה הדבר התבטא בכך שניתן היה לקבל רק את קו הפעולה של הכוח, ולא נקודה אחת בה יש להציב את הכוח. כדי להווכח בכך שאין פתרון יחיד למשוואה $\mathbf{a}\times\mathbf{u}=\mathbf{b}$, נניח ש-$\mathbf{u}_0$ הוא פתרון של המשוואה, ונדון בוקטור $\mathbf{u}$ בצורה $\mathbf{u}=\mathbf{u}_0+c\mathbf{a}$, כאשר c הוא מספר כלשהו. אנו שמים לב שמתקיים

$$\mathbf{a}\times\mathbf{u}=\mathbf{a}\times(\mathbf{u}_0+c\mathbf{a})=\mathbf{a}\times\mathbf{u}_0+c\mathbf{a}\times\mathbf{a}=\mathbf{a}\times\mathbf{u}_0=\mathbf{b} ,$$

כלומר, גם $\mathbf{u}$ השונה מ-$\mathbf{u}_0$ הוא פתרון המשוואה הוקטורית. דרך נוספת להווכח בכך שהמשוואות אינן בלתי תלויות, היא על ידי חישוב הדטרמיננט של המקדמים במשוואות. החישוב מראה כי

$$\begin{vmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{vmatrix} = a_x a_y a_z - a_x a_y a_z = 0 .$$

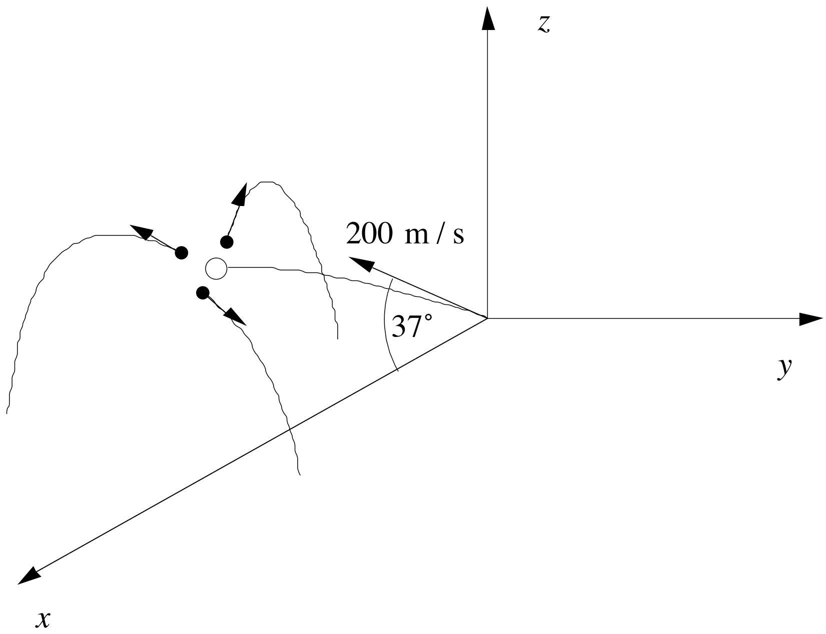
כלומר, דטרמיננט המקדמים מתאפס, והדבר מציין שהמשוואות אינן בלתי תלויות.

נובע מכך שרק שתיים מבין שלושת המשוואות עבור רכיבי הוקטור $\mathbf{u}$ הן בלתי תלויות. כלומר, נוכל להשתמש רק בשתי משוואות ואם נרצה להגדיר את הוקטור $\mathbf{u}$ באופן חד משמעי נהיה זקוקים לאינפורמציה נוספת.

אנו שמים לב לכך שהוקטור $\mathbf{b}$ אינו וקטור שרירותי כלשהו, אלא הוא חייב להיות ניצב ל-$\mathbf{a}$ מהגדרת המכפלה הוקטורית. התנאי ש-$\mathbf{b}$ ניצב ל-$\mathbf{a}$ הוא תנאי לקיום פתרון למשוואה. ניתן לראות את חוסר יחידות הפתרון כתוצאה של תנאי זה.

3.2.8 דוגמה

קליע משוגר במהירות של $200\ \mathrm{m/s}$ בזווית של 37° מעל האופק. תוך כדי מעופו מתפרק הקליע לשלושה חלקים בעלי מסות $m_1 = 40\ \mathrm{kg},\ m_2 = 60\ \mathrm{kg},\ m_3 = 100\ \mathrm{kg}$. כעבור 11 שניות נופל החלקיק m_3 בנקודה $\mathbf{r}_3 = 1800\mathbf{i}+500\mathbf{j}$ (ראה תרשים 5, בו מתוארת גם מערכת הצירים), ומהירותו הינה $\mathbf{v}_3 = 150\mathbf{i}+100\mathbf{j}-120\mathbf{k}$. באותו זמן נמצא החלקיק m_2 בנקודה $\mathbf{r}_2 = 2000\mathbf{i}+110\mathbf{j}+400\mathbf{k}$ ונתון כי היחס בין רכיב ה-y של מהירותו לרכיב ה-x של מהירותו הוא 0.1 . דרוש לחשב את מקומו של החלקיק m_1 ואת מהירותם של החלקיקים m_1, m_2 באותו רגע. האם החלקיקים נעו בנפילה חופשית לאחר התפרקות הקליע?



תרשים 5

פתרון: לפתרון הבעיה נשתמש בשני החוקים הבסיסיים שלמדנו בפרק זה: משוואת התנועה של מרכז המסה ומשוואת התנע הזוויתי.

משוואת התנועה של מרכז המסה מסעיף 3.2.3 קובעת כי מרכז המסה נע כחלקיק שמסתו שווה למסה הכללית של המערכת תחת פעולת שקול הכוחות החיצוניים על המערכת. מכיון שהכוחות החיצוניים הפועלים על המערכת הם כוחות הכובד, וכוח הכובד הפועל על הקליע שווה לסכום כוחות הכובד על חלקיו השונים, המשקל הכללי הוא הכוח שילקח בחשבון בתנועת מרכז המסה. אנו מסיקים כי מרכז המסה של החלקיקים ינוע באותה תנועה שהיה הקליע נע אם לא היה מתפרק. מכיון שנוכל כך לחשב את מקומו ומהירותו של מרכז המסה בזמן $t = 11\ \mathrm{s}$, נקבל משוואות עבור מקומו של החלקיק m_1 ומהירותם של החלקיקים m_1 , m_2 .

משוואת התנע הזוויתי תקשר את קצב שינוי התנע הזוויתי עם שקול המומנטים של הכוחות החיצוניים הפועלים על המערכת. אנו ננצל את משוואת התנע הזוויתי יחסית למרכז המסה מסעיף 3.2.6 משום ששקול המומנטים של כוחות הכובד יחסית למרכז המסה מתאפס. טענה זו נובעת מהעובדה שסכום המומנטים של כוחות הכובד, שווה למומנט של הכוח השקול, כאשר הוא מוצב במרכז המסה (פי שהראינו בסעיף 3.1.5). ברור, כי המומנט שיוצר כוח הכובד השקול המוצב במרכז המסה יחסית למרכז המסה, מתאפס, כי זרוע הכוח היא הוקטור $\mathbf{0}$. משוואת התנע הזוויתי תספק לנו משוואה נוספת עבור מהירותם של החלקיקים m_1 , m_2 .

כזכור, המשוואות המתארות את מקומו ומהירותו של חלקיק שמשוגר במהירות v_0 בזווית θ מעל ציר x ונתון להשפעת כוח הכובד mg בכיוון z- הן

$$x = x_0 + (v_0 \cos\theta)t\ ,\ \ z = z_0 + (v_0 \sin\theta)t - \frac{gt^2}{2}\ ,\ \ v_x = v_0 \cos\theta\ ,\ \ v_z = v_0 \sin\theta - gt\ .$$

ניישם משוואות אלו עבור הנתונים בהם משוגר הקליע ונקבל עבור $t = 11\ \mathrm{s}$:

$$x_c = 1760\,\text{m}\,,\;\; y_c = 0\,,\;\; z_c = 727.1\,\text{m}$$
$$v_{cx} = 160\,\text{m/s}\,,\;\; v_{cy} = 0\,,\;\; v_{cz} = 12.45\,\text{m/s}\,.$$

במשוואה הוקטורית $m\mathbf{r}_c = m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + m_3\mathbf{r}_3$ הנעלם היחידי הוא כעת הוקטור $\mathbf{r}_1$. נוכל לחלץ אותו ולקבל

$$\mathbf{r}_1 = 1300\mathbf{i} - 1415\mathbf{j} + 3036\mathbf{k}\,.$$

המשוואה הוקטורית עבור מהירות מרכז המסה

$$m\mathbf{v}_c = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + m_3\mathbf{v}_3\,,$$

שבה נעלמים הוקטורים $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, תספק לנו שלוש משוואות סקלריות עבור ששת הנעלמים.

וקטורי המקום של החלקים השונים יחסית למרכז המסה הם:

$$\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_c = -460\mathbf{i} - 1415\mathbf{j} + 2308\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r}'_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_c = 240\mathbf{i} + 110\mathbf{j} - 327\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r}'_3 = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_c = 40\mathbf{i} + 500\mathbf{j} - 727\mathbf{k}\,.$$

כאמור לעיל, משוואת התנע הזוויתי תבטיח לנו כי התנע הזוויתי של המערכת יחסית למרכז המסה ישאר קבוע כתוצאה מכך ששקול המומנטים מתאפס. התנע הזוויתי יחסית למרכז המסה היה כמובן אפס כל עוד הקליע נשאר שלם, לכן אנו יכולים להסיק, שהתנע הזוויתי יחסית למרכז המסה נשאר אפס גם לאחר התפרקות הקליע. כלומר, הוקטורים הנעלמים $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, יקיימו גם את המשוואה:

$$\mathbf{r}'_1 \times m_1\mathbf{v}_1 + \mathbf{r}'_2 \times m_2\mathbf{v}_2 + \mathbf{r}'_3 \times m_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}\,.$$

קיבלנו שתי משוואות וקטוריות, ועל מנת לפתור אותן, נציב ראשית את

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{m_1}\left(m\mathbf{v}_c - m_2\mathbf{v}_2 - m_3\mathbf{v}_3\right)$$

ממשוואת מהירות מרכז המסה למשוואת התנע הזוויתי, ונקבל:

$$\mathbf{r}'_1 \times m_1\frac{1}{m_1}\left(m\mathbf{v}_c - m_2\mathbf{v}_2 - m_3\mathbf{v}_3\right) + \mathbf{r}'_2 \times m_2\mathbf{v}_2 + \mathbf{r}'_3 \times m_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}\,.$$

במשוואה זו $\mathbf{v}_2$ הוא הנעלם היחידי, ועל ידי סידור האברים השונים נקבל

$$m_2(\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1) \times \mathbf{v}_2 = m_3(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_3) \times \mathbf{v}_3 - m\mathbf{r}'_1 \times \mathbf{v}_c\,.$$

מכיון שבמשוואה האחרונה ידועים לנו הן האיברים באגף ימין והן הכופל של הוקטור הנעלם באגף שמאל, משוואה זו היא מהצורה $\mathbf{a} \times \mathbf{u} = \mathbf{b}$ שבה דנו בסעיף הקודם. הוקטורים הידועים $\mathbf{a}$ ו-$\mathbf{b}$ נתונים באמצעות הוקטורים אותם כבר חישבנו, על ידי $\mathbf{a} = m_2(\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1)$, $\mathbf{b} = m_3(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_3) \times \mathbf{v}_3 - m\mathbf{r}'_1 \times \mathbf{v}_c$. כזכור, לא ניתן יהיה לקבל את רכיבי הוקטור $\mathbf{v}_2$ ממשוואה זו בלבד. נוכל להשתמש בשתיים מתוך המשוואות הסקלריות ואת האינפורמציה הנוספת אנו מקבלים מהנתון כי $v_{2y} = 0.1v_{2x}$. שים לב לכך

שהוקטור באגף ימין של המשוואה צריך להיות ניצב לוקטור $m_2(\mathbf{r}'_2-\mathbf{r}'_1)$ בכדי שיהיה פתרון למשוואה. ניתן לבדון שתנאי זה אכן מתקיים עבור הנתונים בשאלה. למעשה ניתן היה לציין בנתוני השאלה רק שניים מתוך רכיבי $\mathbf{v}_3$ ולקבל את הרכיב השלישי מתנאי ניצבות זה.

בהצבת הגדלים הידועים המשוואה הוקטורית תהיה

$$60\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 240-(-460) & 110-(-1415) & -327-2308\\ v_{2x} & v_{2y} & v_{2z}\end{vmatrix}=100\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -460-40 & -1415-500 & 2308-(-727)\\ 150 & 100 & -120\end{vmatrix}$$
$$-200\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -460 & -1415 & 2308\\ 160 & 0 & 12.45\end{vmatrix},$$

ושתי המשוואות הסקלריות הראשונות שמתקבלות מהמשוואה הוקטורית הן

$$60[(110+1415)v_{2z}+(327+2308)v_{2y}]=100[(1415+500)120-(2308+727)100]$$
$$-200(-1415)12.45$$

$$60[(-327-2308)v_{2x}-(240+460)v_{2z}]=100[(2308+727)-(-460-40)(-120)]$$
$$-200[2308\cdot 160-(-460)12.45].$$

בצרוף $v_{2y}=0.1v_{2x}$, ניתן לפתור את שלושת רכיבי המהירות $\mathbf{v}_2$ ולקבל:

$$v_{2x}=246\text{ m/s}\,,\quad v_{2y}=24.6\text{ m/s}\,,\quad v_{2z}=-84\text{ m/s}\,.$$

מהמשוואה $\mathbf{v}_1=\dfrac{1}{m_1}\left(m\mathbf{v}_c-m_2\mathbf{v}_2-m_3\mathbf{v}_3\right)$, נוכל כעת לחשב את $\mathbf{v}_1$ ולקבל:

$$v_{1x}=-35.7\text{ m/s}\,,\quad v_{1y}=-296\text{ m/s}\,,\quad v_{1z}=498\text{ m/s}\,.$$

נבדוק כעת אם החלקים נעו בנפילה חופשית לאחר פיצוץ רגעי, או שפעלו כוחות הדדיים ביניהם במשך זמן מסוים. לצורך זה נניח שאכן כאשר הגיע הגוף לנקודה $\mathbf{r}_0$ במסלולו, הוא התפוצץ באופן מיידי, ושלושת החלקים נעו פרק זמן של t שניות עד שהגיעו למקומות אותם מצאנו. את המהירויות של החלקים מיד לאחר הפיצוץ נסמן על ידי $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ בהתאמה. על סמך חוקי התנועה בהשפעת כוח הכובד אנו יכולים לרשום

$$\mathbf{r}_1=\mathbf{r}_0+u_{1x}t\mathbf{i}+u_{1y}t\mathbf{j}+(u_{1z}t-\tfrac{1}{2}gt^2)\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r}_2=\mathbf{r}_0+u_{2x}t\mathbf{i}+u_{2y}t\mathbf{j}+(u_{2z}t-\tfrac{1}{2}gt^2)\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r}_3=\mathbf{r}_0+u_{3x}t\mathbf{i}+u_{3y}t\mathbf{j}+(u_{3z}t-\tfrac{1}{2}gt^2)\mathbf{k}\,.$$

על ידי חיסור המשוואה השניה מהשלישית נקבל

$$\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_2=(u_{3x}-u_{2x})t\mathbf{i}+(u_{3y}-u_{2y})t\mathbf{j}+(u_{3z}-u_{2z})t\mathbf{k}\ .$$

מכיון שבתנועה תחת השפעת הכובד בכיוון z המהירויות בכיוונים x ו- y נשארות קבועות, המהירויות בכיוונים אלו מיד לאחר הפיצוץ שוות למהירויות שמצאנו. כלומר,

$$u_{2x}=v_{2x}\ ,\ u_{2y}=v_{2y}\ ,\ u_{3x}=v_{3x}\ ,\ u_{3y}=v_{3y}\ .$$

בהצבת הערכים הידועים עבור $v_{2x}\ ,\ v_{2y}\ ,\ v_{3x}\ ,\ v_{3y}$, $\mathbf{r}_2$ ו- $\mathbf{r}_1$, שתי המשוואות הסקלריות הראשונות שמתקבלות מהמשוואה הוקטורית הן

$$\begin{aligned}1800-200&=(150-246)t\\ 500-110&=(100-24.6)t\ .\end{aligned}$$

קל לראות שהערכים עבור t שמתקבלים משתי משוואות אלו שונים ולכל אנו מסיקים שההנחה שהם נעו תחת השפעת כוח הכובד בלבד אינה נכונה והחלקים המשיכו להפעיל כוחות זה על זה במשך פרק זמן מסוים.

3.3 עבודה ואנרגיה במערכת חלקיקים

3.3.1 אנרגיה קינטית של מערכת חלקיקים

האנרגיה הקינטית של מערכת חלקיקים מוגדרת כסכום האנרגיות הקינטיות של החלקיקים מהם המערכת מורכבת. כלומר,

$$T=\sum_{i=1}^{n}T_i=\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\mathbf{v}_i\cdot\mathbf{v}_i\ .$$

3.3.2 אנרגיה קינטית של מערכת חלקיקים יחסית למרכז המסה

את האנרגיה הקינטית של מערכת חלקיקים ניתן לבטא באמצעות המהירויות של החלקיקים יחסית למרכז המסה. כזכור, $\mathbf{v}_i=\mathbf{v}_c+\mathbf{v}'_i$, כאשר $\mathbf{v}'_i$ היא מהירות החלקיק יחסית למרכז המסה. בהצבת ביטוי זה להגדרת האנרגיה הקינטית של מערכת החלקיקים, נקבל

$$\begin{aligned}T&=\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i(\mathbf{v}_c+\mathbf{v}'_i)\cdot(\mathbf{v}_c+\mathbf{v}'_i)\\ &=\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\mathbf{v}_c\cdot\mathbf{v}_c+\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\mathbf{v}'_i\cdot\mathbf{v}'_i+\sum_{i=1}^{n}m_i\mathbf{v}'_i\cdot\mathbf{v}_c\\ &=\tfrac{1}{2}m\mathbf{v}_c\cdot\mathbf{v}_c+\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\mathbf{v}'_i\cdot\mathbf{v}'_i+\mathbf{v}_c\cdot\sum_{i=1}^{n}m_i\mathbf{v}'_i\ .\end{aligned}$$

הסכום באיבר האחרון באגף ימין מתאפס כי הוא מבטא את מהירות מרכז המסה יחסית לעצמו (ראה סעיפים קודמים), ולכן,

$$T = \tfrac{1}{2}mv_c^2 + \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}'_i \cdot \mathbf{v}'_i \ .$$

את האיבר הראשון בביטוי זה נכנה **האנרגיה הקינטית של מרכז המסה**, הוא שווה לאנרגיה הקינטית שהיתה לחלקיק שמסתו זהה למסה הכללית של המערכת, אם היה נע במהירות מרכז המסה. האיבר השני מביע את האנרגיה הקינטית יחסית למרכז המסה. אם כן, האנרגיה הקינטית שווה לסכום האנרגיה הקינטית של מרכז המסה והאנרגיה הקינטית יחסית למרכז המסה.

3.3.3 חוק העבודה והאנרגיה עבור מערכת חלקיקים

ההנחות שהנחנו עבור הכוחות הפנימיים, איפשרו לנו להתעלם מהם במשוואות התנע והתנע הזוויתי שפיתחנו בסעיפים קודמים. כזכור, קיבלנו את המשוואות הללו, על ידי סיכום המשוואות המתאימות עבור החלקיקים השונים המרכיבים את המערכת. נסכם אם כן את חוק העבודה והאנרגיה לתנועת החלקיק ה- i

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i dt = T_{i_2} - T_{i_1} \ ,$$

עבור כל החלקיקים. נקבל:

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i dt = \sum_{i=1}^{n} T_{i_2} - T_{i_1} \ .$$

בהצבת הביטוי לכוח בתלות הכוחות החיצוניים והפנימיים, נקבל:

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{f}_i + \sum_j \mathbf{f}_{ij}) \cdot \mathbf{v}_i dt = \sum_{i=1}^{n} T_{i_2} - T_{i_1} \ .$$

שימוש בהגדרת האנרגיה הקינטית של מערכת חלקיקים, והחלפת סדר הסיכום והאינטגרציה באגף שמאל, יתנו לבסוף את המשוואה:

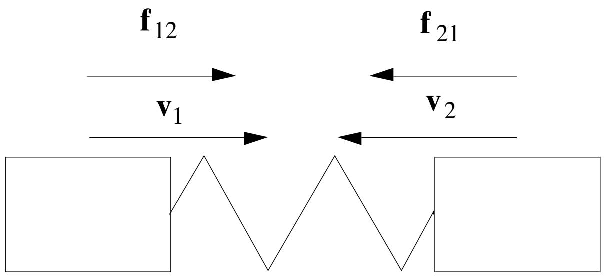
$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{v}_i + \sum_{i,j} \mathbf{f}_{ij} \cdot \mathbf{v}_i \right) dt = T_2 - T_1 \ .}$$

בפיתוח משוואת התנע הזוויתי, קיבלנו סכום כפול $\Sigma_{i,j} \mathbf{f}_{ij}$, והוכחנו שהוא מתאפס כתוצאה מההנחות. לעומת זאת, במשוואה האחרונה, אנו כופלים ראשית כל איבר בסכום הכפול ב- $\mathbf{v}_i$ לפני הסיכום, ואין כל סיבה להניח שהסכום הכפול

$$\sum_{i,j} \mathbf{f}_{ij} \cdot \mathbf{v}_i$$

מתאפס. אנו מסיקים מכך, שבחישוב השינוי באנרגיה הקינטית של מערכת חלקיקים, אנו חייבים לקחת בחשבון את הכוחות הפנימיים.

ניתן לראות את השפעת עבודת הכוחות הפנימיים בדוגמה הפשוטה הבאה. בתרשים 6 מתוארות שתי מסות המחוברות באמצעות קפיץ ומלבד הקפיץ לא פועלים כוחות. הכוח בקפיץ הוא כמובן כוח פנימי המתאים להנחות שעשינו, וסכום הכוחות הפנימיים על שתי המסות מתאפס. אולם, כאשר המסות מתקרבות זו לזו, המכפלה הסקלרית של כל כוח פנימי במהירות החלקיק המתאים הינה חיובית, ולכן ההספק אינו מתאפס כל עוד החלקיקים מתקרבים זה לזה. האנרגיה הקינטית של המערכת תגדל בהתאם.



תרשים 6

3.3.4 העבודה והאנרגיה הפוטנציאלית של כוח הכובד במערכת חלקיקים

נניח כי כוח הכובד פועל בכיוון $-\mathbf{k}$. כוח הכובד על החלקיק m_i יהיה אם כן

$$\mathbf{f}_i = -m_i g\mathbf{k} ,$$

והעבודה שמבצעים כוחות הכובד בזמן תנועת המערכת תהיה

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{v}_i dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i - m_i g\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_i dt$$

$$= -g\mathbf{k} \cdot \int_{t_1}^{t_2} \sum_i m_i \mathbf{v}_i dt$$

$$W = -g\mathbf{k} \cdot \int_{t_1}^{t_2} m\mathbf{v}_c dt ,$$

כאשר השתמשנו בעובדה שהוקטור $g\mathbf{k}$- הינו קבוע בשורה השניה, ובמהירות מרכז המסה בשורה השלישית. על ידי הכנסת הוקטור הקבוע $g\mathbf{k}$- חזרה לתוך האינטגרל נקבל

$$W = \int_{t_1}^{t_2} -mg\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_c dt .$$

כלומר, **העבודה שמבצעים כוחות הכובד בתנועת מערכת חלקיקים שווה לעבודה שמבצע המשקל הכללי של המערכת בתנועת מרכז המסה**. נובע מכלל זה כי העבודה שמבצעים כוחות הכובד במערכת חלקיקים שווה לשינוי באנרגיה הפוטנציאלית של מרכז המסה.

3.3.5 מערכת חלקיקים קשיחה

מערכת חלקיקים קשיחה, היא מערכת בה המרחק בין זוג חלקיקים נשאר קבוע בכל אחד ממצבי המערכת. כלומר, עבור כל i ו-j הגודל $\left|\mathbf{r}_i(t)-\mathbf{r}_j(t)\right|$ אינו תלוי בזמן. נובע מכך כי

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}\left[\left|\mathbf{r}_i(t)-\mathbf{r}_j(t)\right|^2\right] \\ &= \frac{d}{dt}\left[(\mathbf{r}_i(t)-\mathbf{r}_j(t))\cdot(\mathbf{r}_i(t)-\mathbf{r}_j(t))\right] \\ &= 2(\dot{\mathbf{r}}_i(t)-\dot{\mathbf{r}}_j(t))\cdot(\mathbf{r}_i(t)-\mathbf{r}_j(t)) \end{aligned}.$$

לכן, עבור כל זמן

$$0=(\mathbf{v}_i-\mathbf{v}_j)\cdot(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j)$$

ואנו מסיקים, כי במערכת קשיחה של חלקיקים, המהירות היחסית בין זוג חלקיקים ניצבת לישר המחבר אותם.

3.3.6 עבודה ואנרגיה במערכת חלקיקים קשיחה

במערכת חלקיקים קשיחה, הסכום הכפול שמופיע במשוואת העבודה והאנרגיה למערכת חלקיקים, מתאפס כתוצאה מהכלל שקיבלנו בסעיף הקודם. הסכום הכפול מורכב מזוגות של איברים מהצורה

$$\mathbf{f}_{ij}\cdot\mathbf{v}_i+\mathbf{f}_{ji}\cdot\mathbf{v}_j\,,$$

ועבורם ניתן לרשום

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{ij}\cdot\mathbf{v}_i+\mathbf{f}_{ji}\cdot\mathbf{v}_j &= (\mathbf{f}_{ij}+\mathbf{f}_{ji})\cdot\mathbf{v}_i+\mathbf{f}_{ji}\cdot(\mathbf{v}_j-\mathbf{v}_i) \\ &= 0 \end{aligned}.$$

בשורה הראשונה הוספנו והחסרנו $\mathbf{f}_{ji}\cdot\mathbf{v}_i$, בשורה השניה האיבר הראשון התאפס כתוצאה מההנחה כי $(\mathbf{f}_{ij}+\mathbf{f}_{ji})=\mathbf{0}$, ובאיבר השני התאפסה המכפלה הסקלרית משום שהנחנו ש-$\mathbf{f}_{ji}$ מקביל לוקטור $\mathbf{r}_j-\mathbf{r}_i$ אשר ניצב למהירות היחסית (על סמך תוצאת הסעיף הקודם). אנו מסיקים אם כן כי הסכום הכפול במשוואת האנרגיה מתאפס. משוואת האנרגיה עבור מערכת חלקיקים קשיחה תשווה את עבודת הכוחות החיצוניים בלבד לשנוי באנרגיה הקינטית של המערכת:

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2}\sum_i\mathbf{f}_i\cdot\mathbf{v}_i dt=\sum_i\int_{\mathbf{r}_{i_1}}^{\mathbf{r}_{i_2}}\mathbf{f}_i\cdot d\mathbf{r}_i=T_2-T_1.}$$

3.3.7 משוואת העבודה והאנרגיה עבור תנועת מרכז המסה

כזכור מסעיף 3.2.2, תנועת מרכז המסה זהה לזו חלקיק, שמסתו הינה המסה הכללית של המערכת, ואשר עליו פועל שקול הכוחות החיצוניים. לכן, מרכז המסה יקיים את משוואת העבודה והאנרגיה הקינטית של חלקיק עליו פועלים הכוחות החיצוניים. מכאן,

$$\boxed{\int_{\mathbf{r}_{c_1}}^{\mathbf{r}_{c2}}\left(\sum_i\mathbf{f}_i\right)\cdot d\mathbf{r}_c=\tfrac{1}{2}m(v_{c_2}^2-v_{c_1}^2).}$$

פרק 4: קינמטיקה של גוף קשיח

4.0 מבוא

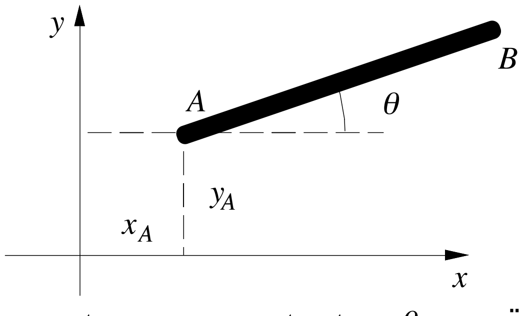
פרק זה הוא הארוך והקשה ביותר בספר. בעוד שברור לנו כיצד לייצג באופן מתמטי מקום של נקודה במרחב באופן חד משמעי יחסית למערכת צירים נתונה, וברור לנו שאנו זקוקים לשלושה מספרים (שלושת הקואורדינטות) בכדי לעשות זאת, הרי תאור מצבו של גוף קשיח יחסית למערכת נתונה מהווה בעיה שאינה פשוטה כלל ועיקר. יחד עם זאת, תאור מצבו של גוף קשיח במרחב הוא בעיה מאוד מעשית בתחומי ההנדסה ובפרט בתחום הרובוטיקה. מתאור המצב של גוף קשיח נעבור לתאור המהירויות של נקודות עליו. נראה כיצד ניתן לחשב את מהירותה של נקודה כלשהי על הגוף על ידי שימוש בוקטור הנקרא "המהירות הזוויתית" של הגוף המתאר את הקצב בו הגוף מסתובב. הכללים שנפתח עבור חישובי המהירות יאפשרו לנו לחשב גם את התאוצה של הנקודות השונות בגוף. כמו כן נדון בתנועה של חלקיקים וגופים יחסית לגופים קשיחים אחרים.

בעוד המעבר משני מימדים לשלושה מימדים בקינמטיקה של חלקיק לא גרמה לשינוי מהותי במושגים השונים, המעבר לשלושה מימדים בתנועה של גוף קשיח, מחייב שנוי מהותי בתפיסה. רצוי לכן שהתלמיד לא ינסה להשתמש בניסיון הקודם שלו במכניקה של גופים בשני מימדים, על מנת לנסות להבין את המושגים המוצגים כאן, אלא, ינסה להבין מחדש את המושגים המוכללים עבור המקרה התלת-מימדי.

4.1 גופים קשיחים ומצביהם במרחב

4.1.1 דרגות חופש

מספר דרגות החופש שיש למערכת מכנית, הוא המספר המינימלי של פרמטרים הדרושים על מנת לתאר באופן חד משמעי את מצב המערכת. לדוגמה, לחלקיק במישור יש שתי דרגות חופש משום שכאשר נתונה לנו מערכת צירים, די לנו בשני מספרים בכדי לתאר את מקומו של החלקיק במישור. שני מספרים אלו יכולים להיות הקואורדינטות הקרטזיות של הנקודה בה החלקיק נמצא, או הקואורדינטות הפולריות של אותה נקודה. אין זה משנה אלו פרמטרים אנו בוחרים כדרגות חופש, מה שחשוב הוא העובדה, שדי בשני מספרים בכדי לציין את מצב החלקיק. לחלקיק במרחב יש כמובן שלוש דרגות חופש, ולמערכת המורכבת משני חלקיקים במישור, יש ארבע דרגות חופש, משום שצריך לציין את מקומותיהם (הבלתי תלויים) של שני החלקיקים. למוט בעל אורך קבוע במישור, יש שלוש דרגות חופש משום שאנו נידע את המקום של כל נקודה עליו, אם נדע את המקום של שתי נקודות הקצה שלו. כדי לאתר את שתי נקודות הקצה, מספיק לדעת את המקום של נקודה אחת ואת הזווית בה המוט מוטה (ראה תרשים), ולכן למוט במישור יש שלוש דרגות חופש.

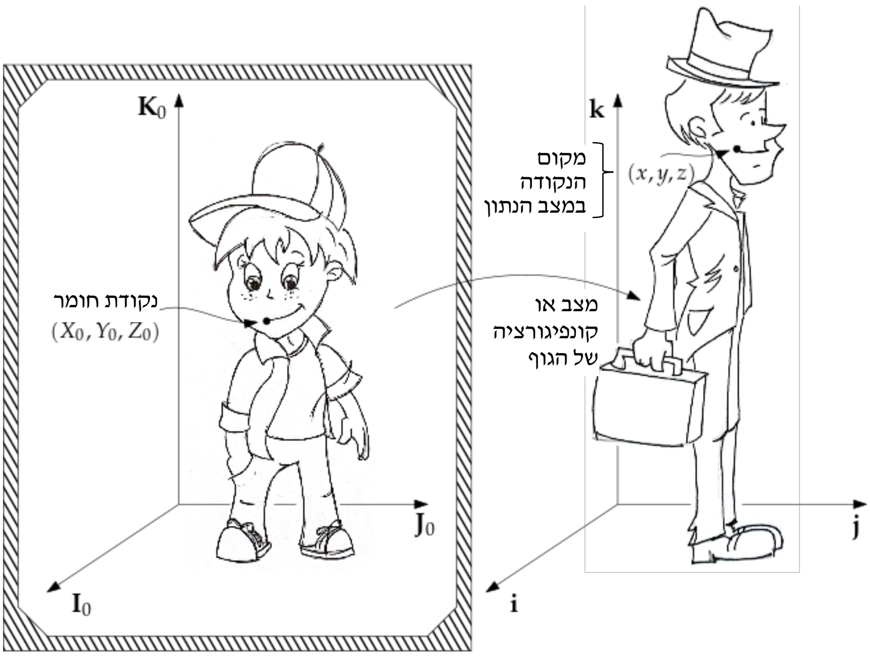


x_A ¨ y_A ו- θ יכולים לשמש כפרמטרים לתאור מצב המוט

תרשים 1

4.1.2 גופים ומצביהם

המונח גוף מתייחס במכניקה לאוסף של נקודות הנקראות **נקודות גוף** או **נקודות חומר**, אשר יכולות להמצא במקומות שונים במרחב. נקודות החומר מאופיינות בכך שאנו יכולים לזהות אותן. כלומר, ביכולתנו לאמר למשל שנקודת החומר הנמצאת במקום $\mathbf{r}$ יחסית למערכת צירים נתונה היא נקודת החומר B (ולא נקודת חומר אחרת). **מצב** של גוף, או **קונפיגורציה** של גוף, הוא הכלל שמציין את המקומות בהן נמצאות נקודות החומר השונות השייכות לגוף. **הדמות** של הגוף במצב מסוים, היא אוסף המקומות שתפוסים על ידי נקודות הגוף. מכיון שמתן שמות לכל נקודות החומר בגוף רציף עלול להיות תהליך אינסופי וחסר תקווה, נהוג להשתמש באחד ממצבי הגוף **כמצב יחוס**: בהנחה שאנו מכירים את המצב הזה של הגוף, השם שתקבל נקודת חומר כלשהי יהיה שם המקום אותו תפסה במצב היחוס.



מצב היחוס (באלבום) הדמות (תמונת המצב הנוכחי)

תרשים 2

ניתן לחשוב על מצב היחוס, כעל צילום של הגוף באלבום אשר צולם בזמן כלשהו בעבר, ואשר משמש אותנו על מנת לזהות את נקודות החומר: "נקודת החומר, אשר נמצאת בצילום במקום ההוא, נמצאת במצב הנוכחי במקום זה" (ראה תרשים 2). כפי שמצוין בתרשים, אין כל הכרח להשתמש באותה מערכת צירים עבור מצב היחוס ועבור תאור המקומות של נקודות החומר. אנו נתייחס בשם **מערכת המרחב**, למערכת הצירים המשמשת אותנו לתאור המקומות במרחב הפיזיקלי. את וקטורי הבסיס במערכת המרחב נסמן תמיד על ידי $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ ואת רכיבי וקטור המקום יחסית אליהם נסמן על ידי x,y,z. את וקטורי הבסיס של מערכת היחוס נסמן על ידי $\mathbf{I}_0,\mathbf{J}_0,\mathbf{K}_0$, ואת רכיבי וקטור המקום יחסית אליהם, נסמן על ידי אותיות גדולות כ-X_0,Y_0,Z_0. נקודת חומר תצוין אם כן על ידי

$$\mathbf{R}_0 = X_0\mathbf{I}_0 + Y_0\mathbf{J}_0 + Z_0\mathbf{K}_0 .$$

ברור שבכדי לתאר את מצבו של גוף כללי, יש לציין את המקום של כל נקודה בגוף. כלומר, מצב של גוף יתואר על ידי פונקציה וקטורית

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{R}_0) ,$$

ותנועתו של גוף תתואר על ידי הכנסת פרמטר הזמן כמשתנה:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{R}_0, t) \ .$$

מכיוון שבגוף רציף יש אינסוף נקודות, צריך אינסוף פרמטרים בכדי לתאר את מקום כולן, ולגוף רציף יש איפוא אינסוף דרגות חופש.

במערכות החלקיקים בהם דנו בפרק הקודם היתה לכל חלקיק מסה. נקודות החומר הן חסרות מימד ומסתן אפס. עבור גופים רציפים, אנו מניחים שקיימת פונקציה ρ , שנקראת צפיפות המסה בגוף, כך שהמסה של כל חלק ממנו נתונה על ידי

$$m = \int_V \rho \, dV \ .$$

4.1.3 גוף קשיח

גוף קשיח הוא גוף, שהמרחק בין כל שתי נקודות בו, אינו משתנה בין מצבי הגוף השונים (כולל מצב היחוס כמובן). כלומר, עבור שתי נקודות חומר כלשהן, אם $\mathbf{r}_2(t)$, $\mathbf{r}_1(t)$ יסמנו את המקומות שלהן בזמן t , אזי

$$|\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)| = \text{constant} \ , \quad \frac{d}{dt}|\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t)| = 0 \ ,$$

לכל זמן t . האמור בסעיף 3.3.5 תופס כמובן לגבי גוף קשיח, ובפרט

$$0 = (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \ .$$

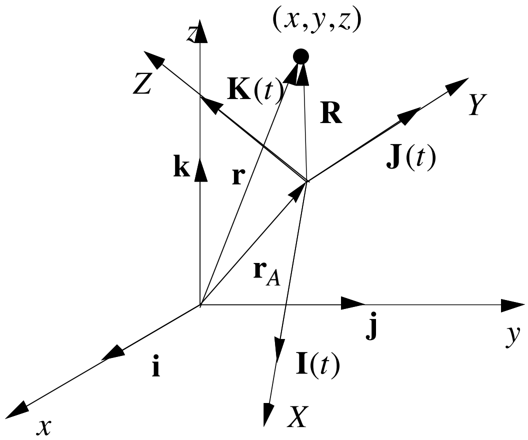
נדון במשולש הנוצר על ידי חיבור שלוש נקודות חומר כלשהן באמצאות קטעים ישרים. ברור שעבור מצבים שונים של הגוף, נקבל משולשים שונים. אולם, מכיון שאורך הצלעות במשולש הוא המרחק בין הנקודות השונות (אשר אינו משתנה במצבי הגוף), המשולשים הללו יהיו חופפים. לכן, גם הזוויות במשולשים אלו תהינה שוות. אנו מסיקים שגם זוויות בין ישרים עליהן נמצאות נקודות חומר אינן משתנות עם הזמן. נובע מכך, שנקודות חומר שנמצאות על ישר אחד במצב היחוס, נמצאות על ישר אחד בכל מצב של הגוף הקשיח.

לשם נוחיות, נתייחס בדרך כלל לגופים קשיחים כאילו מימדיהם הינם אינסופיים והם ממלאים את המרחב כולו (במצב היחוס או במצבים האחרים של הגוף). ניתן לחשוב על מוסכמה זו כעל המשכה דימיונית של הגוף המציאותי על ידי חומר חסר מסה. כתוצאה מגישה זו הגוף הקשיח מזוהה למעשה עם אוסף כל הנקודות (X_0, Y_0, Z_0) .

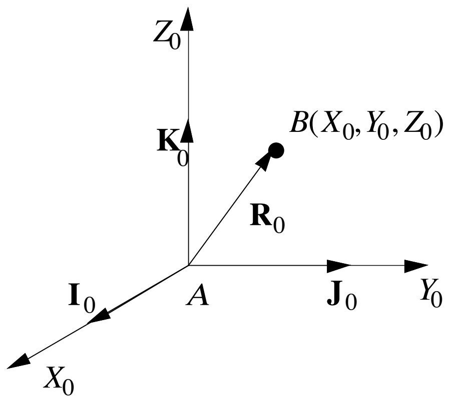
4.1.4 תאור התנועה של גוף קשיח

נדון במצב הגוף הקשיח בזמן t לתנועתו. נסמן על ידי A את נקודת החומר שנמצאת בראשית מערכת היחוס (זו יכולה להיות נקודה דמיונית כאמור בפסקה הקודמת), ואת מקומה בזמן t , נסמן על ידי $\mathbf{r}_A$. נקודות החומר הנמצאות לאורך הציר X_0 , ימצאו במצב הנתון, על ישר העובר דרך הנקודה $\mathbf{r}_A$ ומרחקי המקומות שלהן מהנקודה $\mathbf{r}_A$, יהיו זהים למרחקי נקודות החומר מהנקודה A . מסקנה דומה ניתן להקיש גם לגבי נקודות החומר הנמצאות על גבי הצירים Y_0 ו-Z_0 . בנוסף, הזוויות בין כל שניים מתוך שלושת

הישרים הללו, תשארנה זוויות ישרות, ולכן, אותם שלושה ישרים יכולים לשמש כצירי קואורדינטות. אנו נתייחס אל צירים אלו כאל צירי **מערכת הגוף** במצב הנתון. נסמן את הצירים הללו כ- X,Y,Z ואת וקטורי היחידה המתאימים על ידי $\mathbf{I}(t), \mathbf{J}(t), \mathbf{K}(t)$ (ראה תרשים 3). ברור שבמצב אחר של הגוף, בזמן אחר, הצירים X,Y,Z ווקטורי היחידה המתאימים יהיה בכיוונים אחרים כתוצאה מתנועת נקודות החומר.



מקום נקודת החומר B בזמן t



מצב היחוס של הנקודה B

תרשים 3

בתרשים מתוארים גם הוקטורים הבאים:

$\mathbf{R}_0$ מתאר את מקום נקודת החומר B במצב היחוס,

$\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$ מתאר את מקום נקודת החומר B בזמן t יחסית למקומה של A ,

$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ מתאר את מקומה של B יחסית לראשית מערכת המרחב, ורכיביו בבסיס $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ הם x,y,z . שיטת סימון זו תשמש אותנו גם בהמשך.

לוקטור $\mathbf{R}$ ישנם רכיבים הן בבסיס $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$, והן יחסית לבסיס $\mathbf{I}(t), \mathbf{J}(t), \mathbf{K}(t)$. מהעובדה שמרחקים בין נקודות חומר, וזוויות בין ישרים עליהם נמצאים נקודות חומר, אינם משתנים בזמן התנועה, נובע כי הקואורדינטות של הנקודה B יחסית לצירים X,Y,Z (שמתקבלות על ידי הטלים על מישורי הקואורדינטות ועל הצירים עצמם), אינן משתנות תוך כדי התנועה. קואורדינטות אלו תהינה זהות לקואורדינטות יחסית לצירי מערכת היחוס X_0, Y_0, Z_0 . כלומר, ניתן לבטא את הוקטור $\mathbf{R}$ באמצעות רכיביו בבסיס $\mathbf{I}(t), \mathbf{J}(t), \mathbf{K}(t)$ על ידי

$$\mathbf{R} = X_0\mathbf{I} + Y_0\mathbf{J} + Z_0\mathbf{K} .$$

כמו-כן ברור מהתרשים כי

$$\boxed{\mathbf{r} = \mathbf{r}_A + \mathbf{R} = \mathbf{r}_A + X_0\mathbf{I} + Y_0\mathbf{J} + Z_0\mathbf{K} .}$$

אנו מסיקים מהמשוואה האחרונה, כי ניתן לדעת את וקטור המקום של כל נקודת חומר במצב נתון של גוף קשיח, על ידי ציון הוקטורים $\mathbf{r}_A, \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$. כפי שאמרנו, נקודת חומר כלשהי, מאופינת על ידי הקואורדינטות שלה במצב היחוס X_0, Y_0, Z_0 , והצבתן של הקואורדינטות למשוואה האחרונה תיתן לנו את וקטור המקום שלה. לסיכום: **מקום ראשית מערכת היחוס $\mathbf{r}_A$ ווקטורי היחידה $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$ בכיווני הצירים של מערכת הגוף מאפיינים לחלוטין את מצבו של גוף קשיח**

הוקטור $\mathbf{r}_A$ מציין את התזוזה של הנקודה A ממצב היחוס, ואין כמובן כל קושי בציונו. מצב וקטורי היחידה $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$ מאפיין את הכיוון במרחב של הגוף הקשיח, או את **הסיבוב** שלו, יחסית למצב היחוס. בסעיפים הבאים נדון בדרכים שונות לתאור הוקטורים $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$.

הערה: בסעיף 4.1.2 ציינו, כי באופן כללי, המערכת X_0, Y_0, Z_0 שונה מהמערכת x,y,z. למעשה, בפעמים רבות אנו נשתמש במערכת הצירים x,y,z , גם לתיאור מצב היחוס של הגוף. במקרה זה, כאשר אותה מערכת צירים משמשת אותנו הן לתאור מצב היחוס של הגוף והן לתאור תנועתו, המספרים X_0, Y_0, Z_0 הם הקואורדינטות של נקודת החומר הנדונה במערכת המרחב, x,y,z , במצב היחוס של הגוף. פעמים, כאשר יהיה נתון לנו מצב מסוים של גוף, ולא תהיה נתונה לנו מערכת צירים עדיפה במרחב, נשתמש בצירים X,Y,Z במצב הנתון של הגוף, גם לצורך מערכת המרחב וגם לצורך מערכת היחוס.

4.1.5 תאור הסיבוב של גוף קשיח

כאמור לעיל, סיבוב הגוף הקשיח בא לידי ביטוי בכיווני וקטורי היחידה $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$. כדי לתאר וקטורים אלו, עלינו לציין את רכיביהם במערכת המרחב, היא המערכת שיחסית אליה אנו מודדים את התנועה. אנו נשתמש בכלל הסימון הבא: האות A , או אותיות דומות אחרות, בצירוף שני מציינים תחתיים יציינו את הרכיבים של וקטורי היחידה $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$. המציין התחתי הראשון יהיה באות קטנה, ויתאר איזה רכיב של הוקטור אנו רושמים. המציין השני יהיה באות גדולה, ויציין את וקטור היחידה אותו אנו מתארים. לדוגמה A_{xX} יציין את רכיב ה-x של וקטור היחידה $\mathbf{I}$, ו-A_{yZ} מציין את הרכיב y של $\mathbf{K}$. מכיון שאנו דנים בוקטורי יחידה, מתקיימים הקשרים הבאים

$$\begin{aligned}
\mathsf{A}_{xX} &= \mathbf{I}\cdot\mathbf{i} = \cos(\mathbf{I},\mathbf{i}) \\
\mathsf{A}_{yX} &= \mathbf{I}\cdot\mathbf{j} = \cos(\mathbf{I},\mathbf{j}) \\
\mathsf{A}_{xZ} &= \mathbf{K}\cdot\mathbf{i} = \cos(\mathbf{K},\mathbf{i}) \\
\vdots \quad & \quad \vdots \qquad \quad \vdots
\end{aligned}$$

וכדומה, כאשר $\cos(\mathbf{I},\mathbf{j})$, למשל, מייצג את קוסינוס הזווית בין הוקטור $\mathbf{I}$ לוקטור $\mathbf{j}$. נגדיר את המטריצה

$$[\mathsf{A}] = \begin{bmatrix} \mathsf{A}_{xX} & \mathsf{A}_{xY} & \mathsf{A}_{xZ} \\ \mathsf{A}_{yX} & \mathsf{A}_{yY} & \mathsf{A}_{yZ} \\ \mathsf{A}_{zX} & \mathsf{A}_{zY} & \mathsf{A}_{zZ} \end{bmatrix},$$

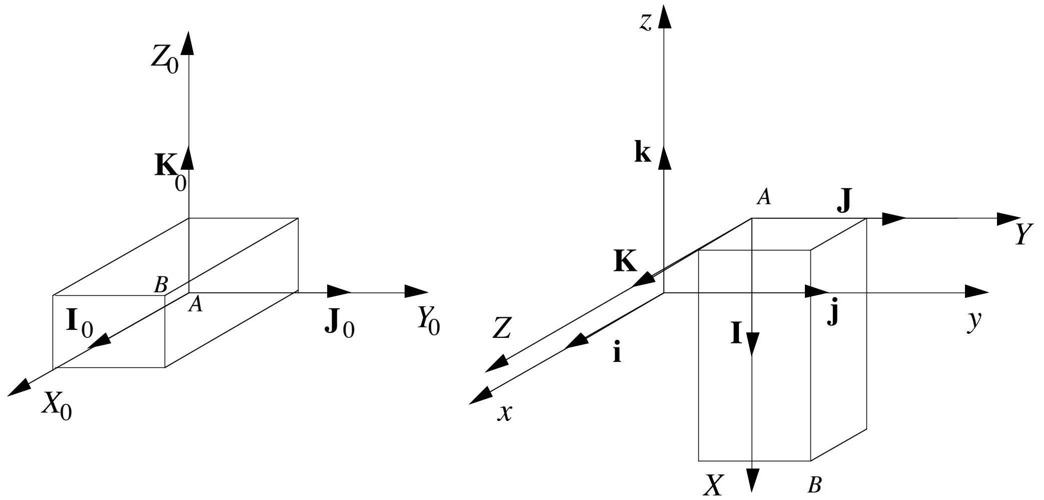
אשר מכילה את כל קוסינוסי הכיוון של מערכת הגוף, ובכך מביעה את סיבוב הגוף הקשיח. על סמך הגדרות אלו ניתן כמובן לכתוב

$$\boxed{\begin{aligned}
\mathbf{I} &= \mathsf{A}_{xX}\mathbf{i} + \mathsf{A}_{yX}\mathbf{j} + \mathsf{A}_{zX}\mathbf{k} \\
\mathbf{J} &= \mathsf{A}_{xY}\mathbf{i} + \mathsf{A}_{yY}\mathbf{j} + \mathsf{A}_{zY}\mathbf{k} \\
\mathbf{K} &= \mathsf{A}_{xZ}\mathbf{i} + \mathsf{A}_{yZ}\mathbf{j} + \mathsf{A}_{zZ}\mathbf{k} .
\end{aligned}}$$

במילים אחרות, העמודה הראשונה במטריצת קוסינוסי הכיוון, מכילה את רכיבי וקטור היחידה $\mathbf{I}$ יחסית למערכת המרחב, העמודה השניה מכילה את רכיבי $\mathbf{J}$ והעמודה השלישית את רכיבי $\mathbf{K}$.

4.1.6 דוגמה

עבור מצב הגוף הקשיח המתואר בתרשים רשום את המטריצה [A] .



תרשים 4

פתרון: מהמתואר בתרשים 4, ומהגדרת קוסינוסי הכיוון, אנו מסיקים כי

$$\mathbf{I} = -\mathbf{k} = A_{xX}\mathbf{i} + A_{yX}\mathbf{j} + A_{zX}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{j} = A_{xY}\mathbf{i} + A_{yY}\mathbf{j} + A_{zY}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{i} = A_{xZ}\mathbf{i} + A_{yZ}\mathbf{j} + A_{zZ}\mathbf{k}\ .$$

השוואת רכיבים בשני צידי המשוואות השונות, תיתן לנו $A_{xX} = 0\ ,\ A_{yX} = 0\ ,\ A_{zX} = -1$ וכדומה, ומטריצת הסיבוב תהיה לכן

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{xX} & A_{xY} & A_{xZ} \\ A_{yX} & A_{yY} & A_{yZ} \\ A_{zX} & A_{zY} & A_{zZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

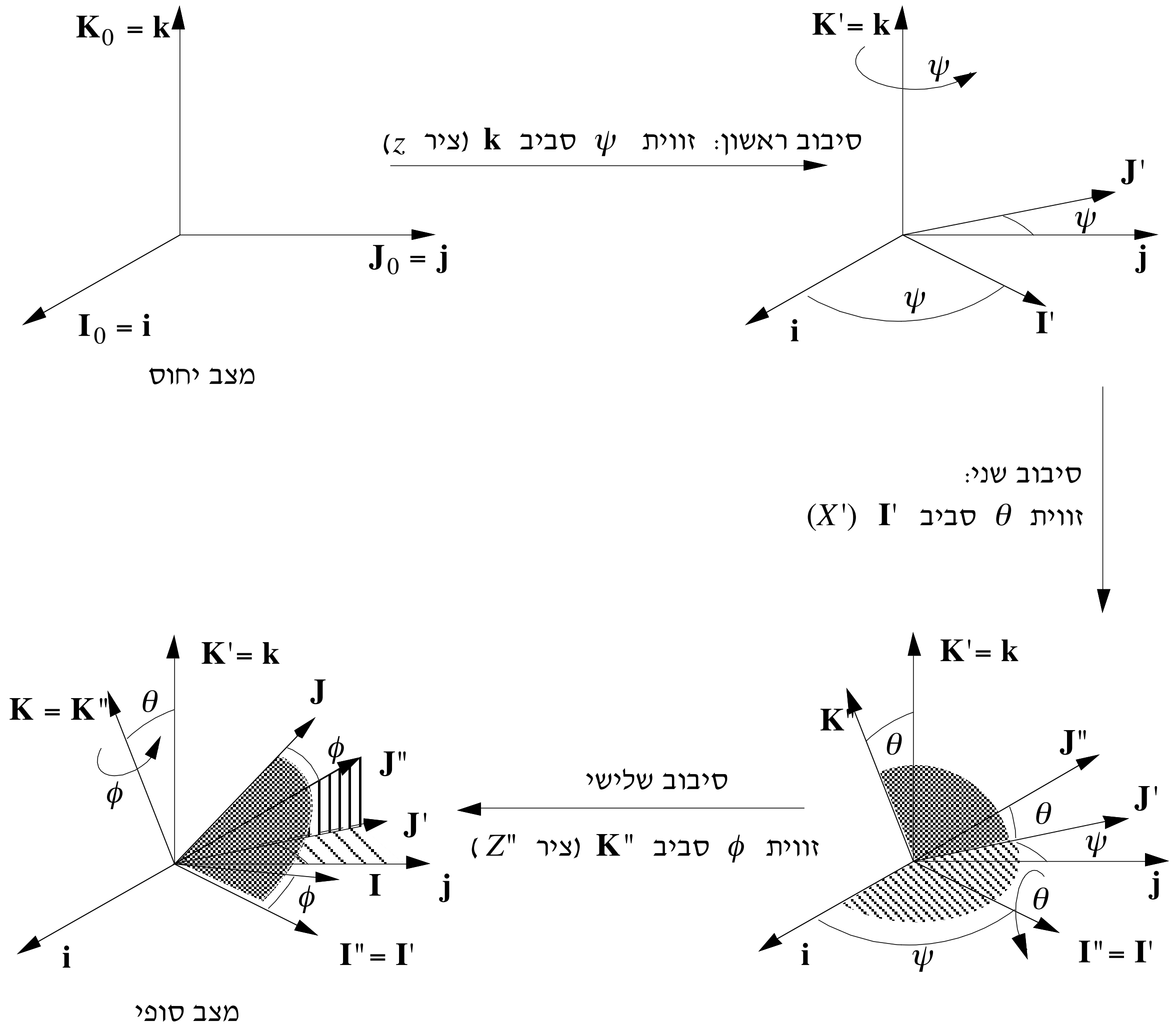
4.1.7 זוויות אוילר

שימוש בזוויות אוילר, הוא דרך מקובלת לתאר את סיבובו של גוף קשיח. בסעיף זה, נסקור את הדרך בה משמשות זוויות אוילר לתאור הסיבוב, ונחשב את אברי מטריצת קוסינוסי הכיוון, המתארת את מצבו הסופי של הגוף. מדובר בשלוש זוויות, אשר בהן מסובבים את הגוף סביב שלושה צירים שונים בתהליך קבוע מראש. התהליך בו מסובבים את הגוף מתואר בתרשים 5, ובתרשים 6 מתואר בהגדלה המצב הסופי של מערכת צירי הגוף.

במצב ההתחלתי אנו מזהים את צירי מערכת היחוס עם צירי מערכת המרחב. הסיבוב הראשון הוא בזווית ψ סביב הוקטור $\mathbf{k}$, ודמויות וקטורי היחידה מסומנות על ידי $\mathbf{I}', \mathbf{J}', \mathbf{K}'$, בהתאמה. הסיבוב השני הוא בזווית θ סביב הוקטור $\mathbf{I}'$, ודמויות וקטורי היחידה מסומנות באמצעות $\mathbf{I}'', \mathbf{J}'', \mathbf{K}''$, בהתאמה. הסיבוב השלישי והאחרון, הוא בזווית ϕ סביב וקטור היחידה $\mathbf{K}''$, לקבלת וקטורי היחידה עבור המצב הסופי, $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$.

ליאונרד אוילר

נולד בשנת 1707 בבזל בשוויצריה, ונחשב למתמטיקאי הפורה ביותר בכל הזמנים. בשנים 1725-1741 עבד בפטרבורג, לאחר מכן בתקופה 1741-1766 עבד בברלין ולבסוף חזר לעבוד בפטרבורג עד מותו ב-1783. היה נשוי פעמיים ואביהם של 13 ילדים. ב-1735 איבד את הראיה באחת מעיניו וב-1766 איבד את הראיה בעינו השניה גם כן. הדבר לא עצר את עבודתו המדעית, וכשהוא נעזר בזיכרונו המעולה, הוא המשיך להכתיב את גילוייו. במשך חייו פירסם 530 ספרים ומאמרים מדעיים ולאחר מותו פורסמו עוד כ-250 מהעבודות שלא הספיק לפרסם בחייו. אוילר עסק בכל תחומי המתמטיקה שהיו ידועים בזמנו: אלגברה, חשבון דיפרנציאלי ואיטגרלי, משוואות דיפרנציאליות, מספרים מרוכבים, חשבון וריאציות ועוד. אוילר כתב שני ספרים במכניקה. הראשון (1736) עסק במכניקה של חלקיקים והשני (1765) עסק במכניקה של גופים קשיחים. בנוסף, אוילר כתב ספרים במכניקה של זורמים, במבני אוניות, בארטילריה ובתיאוריה של המוסיקה.



תרשים 5

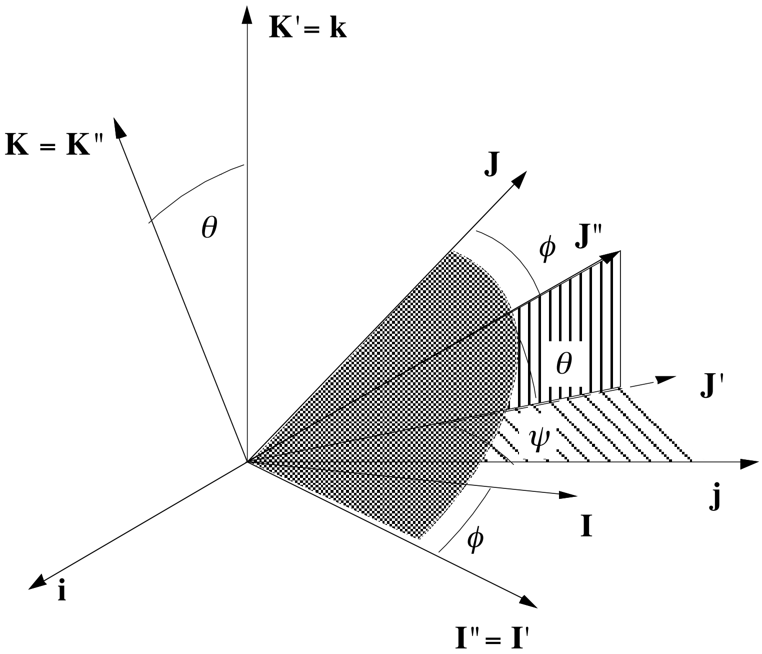
המכניזם המתואר בתרשים 7 בנוי כך שהוא יכול להביא את הגוף (התיבה) למצב המתואר על ידי זוויות אוילר ψ, θ, ϕ . המסגרת החיצונית סובבת בזווית ψ סביב ציר אנכי יחסית לבסיס, המסגרת הפנימית סובבת בזווית θ סביב ציר אופקי יחסית למסגרת החיצונית, והגוף סובב בזווית ϕ יחסית למסגרת הפנימית.

מתהליך הבניה ניתן להסיק את המסקנות הבאות:

א. הוקטורים $\mathbf{i}$, $\mathbf{I}'$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{J}'$ נמצאים על מישור אופקי.

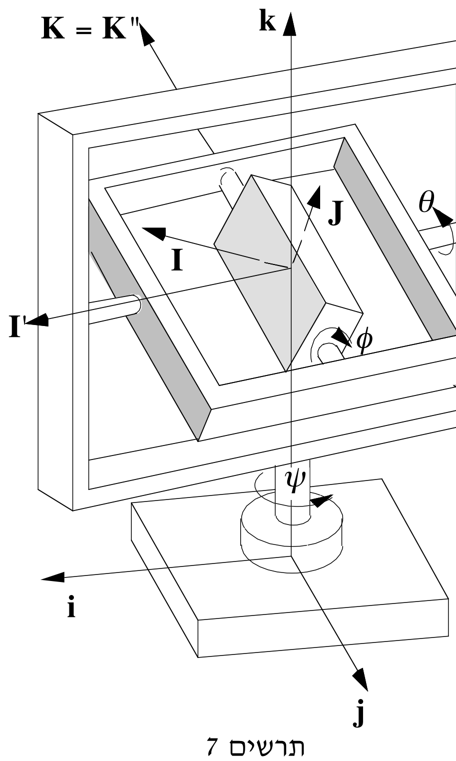
ב. הוקטורים $\mathbf{J}'$, $\mathbf{J}''$, $\mathbf{K}' = \mathbf{k}$, $\mathbf{K} = \mathbf{K}''$ נמצאים על מישור אחד אשר הנורמל לו הוא $\mathbf{I}'$. (מישור זה הוא המישור המנוקד בתרשים עבור המצב לאחר הסיבוב השני.)

ג. הוקטורים $\mathbf{I}'' = \mathbf{I}'$, $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}''$, $\mathbf{J}$ נמצאים על מישור אחד (המנוקד בתאור המצב הסופי), והניצב לו הוא $\mathbf{K} = \mathbf{K}''$.



תרשים 6

תאור מוגדל של המצב הסופי בזוויות אוילר



תרשים 7

על סמך תהליך הבניה והמסקנות הראשוניות הנובעות ממנו, ניתן לרשום:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{I}' &= \cos\psi\mathbf{i} + \sin\psi\mathbf{j}\\
\mathbf{J}' &= -\sin\psi\mathbf{i} + \cos\psi\mathbf{j}\\
\mathbf{K}' &= \mathbf{k}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{I}'' &= \mathbf{I}'\\
\mathbf{J}'' &= \cos\theta\mathbf{J}' + \sin\theta\mathbf{K}'\\
\mathbf{K}'' &= -\sin\theta\mathbf{J}' + \cos\theta\mathbf{K}'
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{I} &= \cos\phi\mathbf{I}'' + \sin\phi\mathbf{J}''\\
\mathbf{J} &= -\sin\phi\mathbf{I}'' + \cos\phi\mathbf{J}''\\
\mathbf{K} &= \mathbf{K}'' ,
\end{aligned}
$$

כאשר שלוש המשוואות הראשונות מתארות את הסיבוב הראשון (במישור x,y), הקבוצה השניה של משוואות מתארת את הסיבוב השני (במישור Y', Z'), וכדומה (ראה תרשים 5). בכדי למצוא את מטריצת קוסינוסי הכיוונים, עבור המצב אליו הגענו עקב התהליך המתואר, עלינו לבטא את וקטורי הבסיס של מערכת הגוף בתלות רכיביהם במערכת המרחב. זאת ניתן לעשות כעת בקלות, על ידי הצבת שלוש המשוואות הראשונות לתוך הקבוצה השניה של שלוש משוואות, ולאחר מכן להציב את התוצאה לקבוצה השלישית של משוואות. נקבל אם כן

$$
\begin{aligned}
\mathbf{I}'' &= \cos\psi\mathbf{i} + \sin\psi\mathbf{j}\\
\mathbf{J}'' &= \cos\theta(-\sin\psi\mathbf{i} + \cos\psi\mathbf{j}) + \sin\theta\mathbf{k}\\
\mathbf{K}'' &= -\sin\theta(-\sin\psi\mathbf{i} + \cos\psi\mathbf{j}) + \cos\theta\mathbf{k}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{I} &= \cos\phi(\cos\psi\mathbf{i} + \sin\psi\mathbf{j}) + \sin\phi[\cos\theta(-\sin\psi\mathbf{i} + \cos\psi\mathbf{j}) + \sin\theta\mathbf{k}]\\
\mathbf{J} &= -\sin\phi(\cos\psi\mathbf{i} + \sin\psi\mathbf{j}) + \cos\phi[\cos\theta(-\sin\psi\mathbf{i} + \cos\psi\mathbf{j}) + \sin\theta\mathbf{k}]\\
\mathbf{K} &= -\sin\theta(-\sin\psi\mathbf{i} + \cos\psi\mathbf{j}) + \cos\theta\mathbf{k} .
\end{aligned}
$$

שלוש המשוואות האחרונות הן אלו המבוקשות וכדי להשתמש בהן נארגן אותן

$$
\begin{aligned}
\mathbf{I} &= (\cos\phi\cos\psi - \sin\phi\cos\theta\sin\psi)\mathbf{i} + (\cos\phi\sin\psi + \sin\phi\cos\theta\cos\psi)\mathbf{j} + \sin\phi\sin\theta\mathbf{k}\\
\mathbf{J} &= (-\sin\phi\cos\psi - \cos\phi\cos\theta\sin\psi)\mathbf{i} + (-\sin\phi\sin\psi + \cos\phi\cos\theta\cos\psi)\mathbf{j} + \cos\phi\sin\theta\mathbf{k}\\
\mathbf{K} &= \sin\theta\sin\psi\mathbf{i} - \sin\theta\cos\psi\mathbf{j} + \cos\theta\mathbf{k} .
\end{aligned}
$$

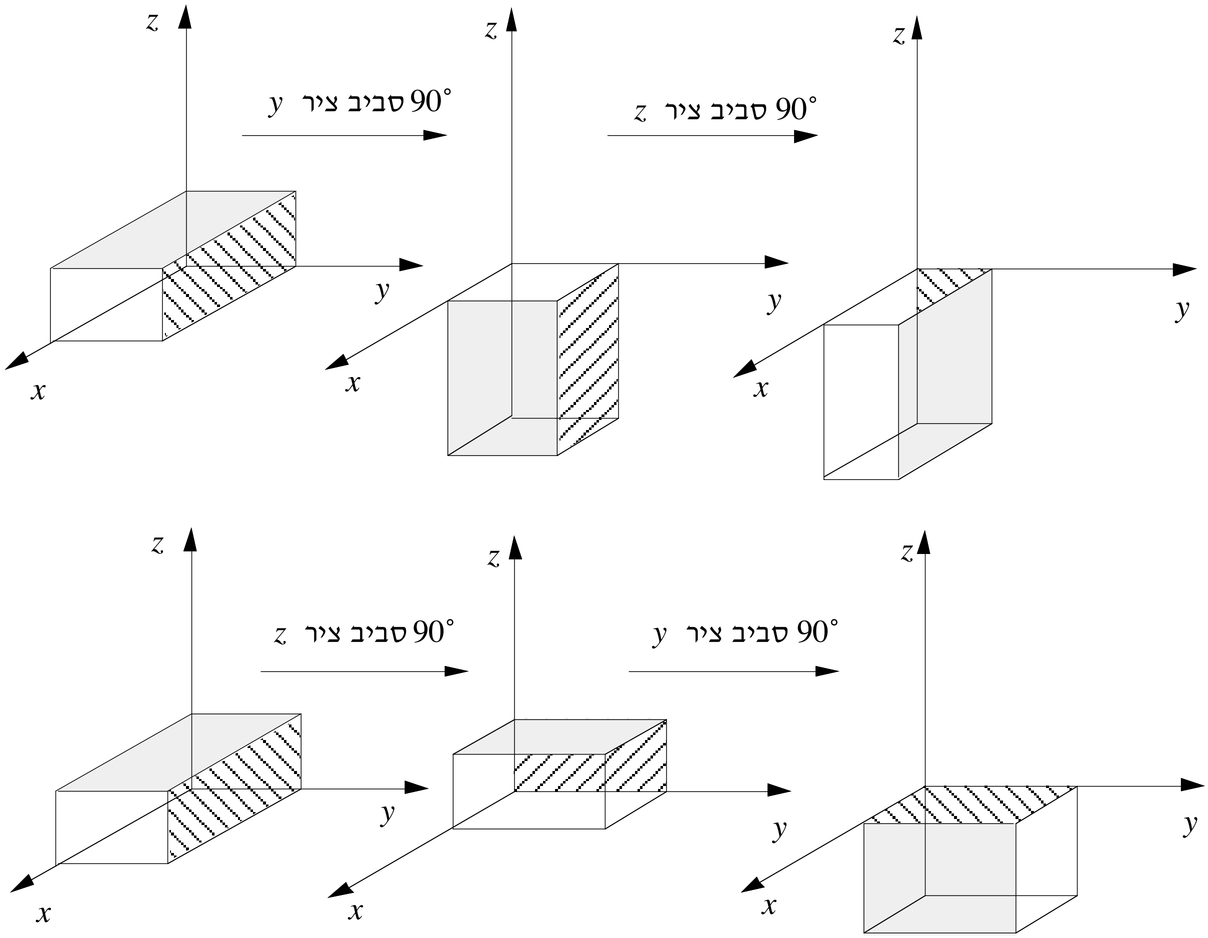
מהשוואה עם הגדרת קוסינוסי הכיוון

$$
\begin{aligned}
\mathbf{I} &= A_{xX}\mathbf{i} + A_{yX}\mathbf{j} + A_{zX}\mathbf{k}\\
\mathbf{J} &= A_{xY}\mathbf{i} + A_{yY}\mathbf{j} + A_{zY}\mathbf{k}\\
\mathbf{K} &= A_{xZ}\mathbf{i} + A_{yZ}\mathbf{j} + A_{zZ}\mathbf{k} ,
\end{aligned}
$$

נקבל עבור המטריצה

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{xX} & A_{xY} & A_{xZ} \\ A_{yX} & A_{yY} & A_{yZ} \\ A_{zX} & A_{zY} & A_{zZ} \end{bmatrix},$$

$$[A] = \begin{bmatrix} \cos\phi\cos\psi - \sin\phi\cos\theta\sin\psi & -\sin\phi\cos\psi - \cos\phi\cos\theta\sin\psi & \sin\theta\sin\psi \\ \cos\phi\sin\psi + \sin\phi\cos\theta\cos\psi & -\sin\phi\sin\psi + \cos\phi\cos\theta\cos\psi & -\sin\theta\cos\psi \\ \sin\phi\sin\theta & \cos\phi\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$



תרשים 8

הערה: בתהליך בו הגדרנו את מצב הגוף על סמך זוויות אוילר, הקפדנו לציין את סדר הסיבובים סביב הצירים השונים. הסיבה לכך ברורה: כאשר יש מספר סיבובים עוקבים, הסדר בו הסיבובים נעשים משפיע על המצב הסופי כפי שמודגם בתרשים 8.

4.1.8 השימוש במטריצת קוסינוסי הכיוונים למציאת מקומה של נקודה

בסעיף 4.1.4 הראינו, כי מקומה של נקודת החומר בעלת הקואורדינטות X_0 , Y_0 , Z_0 , נתון על ידי

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_A + \mathbf{R},$$

כאשר, $\mathbf{R} = X_0\mathbf{I} + Y_0\mathbf{J} + Z_0\mathbf{K}$. את וקטורי היחידה $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$, $\mathbf{K}$ ניתן לבטא באמצעות קוסינוסי הכיוונים, ולקבל את רכיבי וקטור המקום של נקודת החומר יחסית לנקודת החומר A במערכת המרחב:

$$\mathbf{R} = X_0(A_{xX}\mathbf{i} + A_{yX}\mathbf{j} + A_{zX}\mathbf{k}) + Y_0(A_{xY}\mathbf{i} + A_{yY}\mathbf{j} + A_{zY}\mathbf{k}) + Z_0(A_{xZ}\mathbf{i} + A_{yZ}\mathbf{j} + A_{zZ}\mathbf{k}),$$

$$\mathbf{R} = (A_{xX}X_0 + A_{xY}Y_0 + A_{xZ}Z_0)\mathbf{i} + (A_{yX}X_0 + A_{yY}Y_0 + A_{yZ}Z_0)\mathbf{j} + (A_{zX}X_0 + A_{zY}Y_0 + A_{zZ}Z_0)\mathbf{k},$$

כלומר,

$$\begin{aligned} R_x &= A_{xX}X_0 + A_{xY}Y_0 + A_{xZ}Z_0 \\ R_y &= A_{yX}X_0 + A_{yY}Y_0 + A_{yZ}Z_0 \\ R_z &= A_{zX}X_0 + A_{zY}Y_0 + A_{zZ}Z_0 . \end{aligned}$$

את שלושת המשוואות הללו, ניתן לכתוב בשימוש ההגדרה של כפל מטריצה בוקטור בצורה

$$\begin{Bmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{xX} & A_{xY} & A_{xZ} \\ A_{yX} & A_{yY} & A_{yZ} \\ A_{zX} & A_{zY} & A_{zZ} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{Bmatrix},$$

ובקיצור,

$$\boxed{\{R\} = [\mathrm{A}]\{R_0\}.}$$

נובע מכך כי רכיבי וקטור המקום $\mathbf{r}$ נתונים על ידי

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{xX} & A_{xY} & A_{xZ} \\ A_{yX} & A_{yY} & A_{yZ} \\ A_{zX} & A_{zY} & A_{zZ} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{Bmatrix},$$

ובכתיב מטריציוני:

$$\boxed{\{r\} = \{r_A\} + [\mathrm{A}]\{R_0\} .}$$

משוואה זו מראה כיצד באופן מעשי מחשבים את מקומה של נקודת החומר, אם נתונים מטריצת קוסינוסי הכיוונים ומקומה של A.

דוגמה 4.1.9

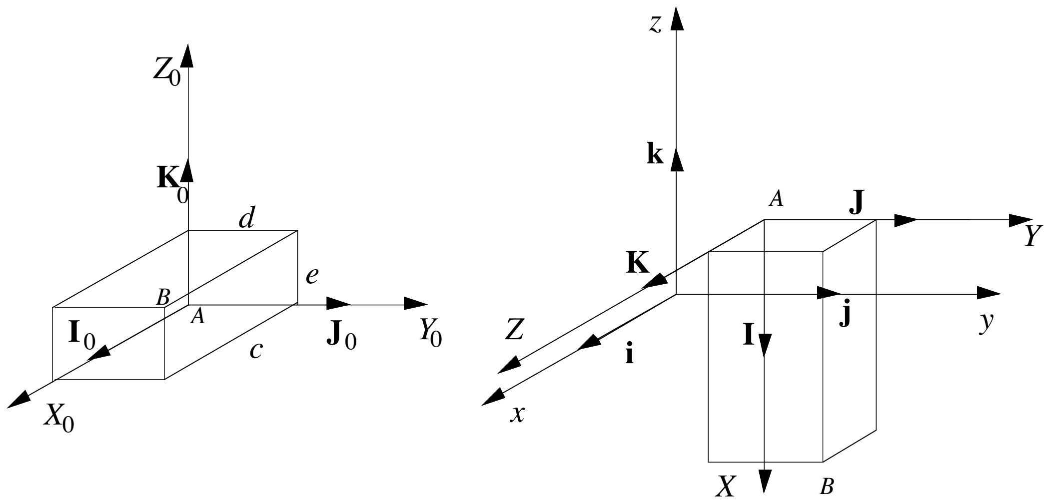
עבור מצב הגוף המתואר בדוגמה 4.1.6, ואשר מתואר שוב בתרשים 9 לצורך הנוחיות, נתון כי

$$, \ c = 0.5 \text{ m}\,,\ \ d = 0.2 \text{ m}\,,\ \ e = 0.1 \text{ m}$$

והנקודה A נמצאת במקום המתואר על ידי הוקטור

$$. \ \mathbf{r}_A = 0.5\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} \text{ m}$$

דרוש למצוא את מקום הנקודה B במצב הנתון.



תרשים 9

פתרון: כל אשר עלינו לעשות הוא להציב למשוואה שקיבלנו בסעיף הקודם את הוקטור $\{R_0\}$, אשר נתון על סמך מימדי התיבה, את המטריצה [A] , אשר מצאנו בדוגמה 4.1.6, ואת $\{r_A\}$. ברור כי

$$,\{R_0\} = \begin{Bmatrix} 0.5 \\ 0.2 \\ 0.1 \end{Bmatrix}$$

ומכאן

$$.\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.5 \\ 0.2 \\ 0.1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.6 \\ 1.2 \\ 0.5 \end{Bmatrix}$$

כלומר,

$$. \ \mathbf{r} = 0.6\mathbf{i} + 1.2\mathbf{j} + 0.5\mathbf{k} \text{ m}$$

4.1.10 תכונות שונות של מטריצת קוסינוסי הכיוונים

בסעיף זה נפרט מספר תכונות בעלות משמעות קינמטית שיש למטריצת הסיבוב $[\mathsf{A}]$. כזכור, עמודותיה של המטריצה הכילו את רכיביהם של וקטורי היחידה $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$, אשר בהיותם ניצבים זה לזה, מקיימים את הזהויות הבאות:

$$\mathbf{I}\cdot\mathbf{I} = 1\,,\ \ \mathbf{J}\cdot\mathbf{J} = 1\,,\ \ \mathbf{K}\cdot\mathbf{K} = 1$$
$$\mathbf{I}\cdot\mathbf{J} = 0\,,\ \ \mathbf{J}\cdot\mathbf{K} = 0\,,\ \ \mathbf{K}\cdot\mathbf{I} = 0\,.$$

אם נבטא את הזהויות הללו על ידי שימוש ברכיבי הוקטורים במערכת המרחב, הלא הם קוסינוסי הכיוונים המופיעים בעמודות המתאימות של המטריצה $[\mathsf{A}]$, נקבל את הזהויות הבאות עבור קוסינוסי הכיוונים:

$$\begin{aligned}
A_{xX}^2 + A_{yX}^2 + A_{zX}^2 &= 1\\
A_{xY}^2 + A_{yY}^2 + A_{zY}^2 &= 1\\
A_{xZ}^2 + A_{yZ}^2 + A_{zZ}^2 &= 1\\
A_{xX}A_{xY} + A_{yX}A_{yY} + A_{zX}A_{zY} &= 0\\
A_{xY}A_{xZ} + A_{yY}A_{yZ} + A_{zY}A_{zZ} &= 0\\
A_{xZ}A_{xX} + A_{yZ}A_{yX} + A_{zZ}A_{zX} &= 0\,.
\end{aligned}$$

את שש המשוואות הללו ניתן לרשום בכתיב מטריציוני בצורה

$$[\mathsf{A}]^{\mathrm{T}}[\mathsf{A}] = [1]\,,$$

כאשר $[\mathsf{A}]^{\mathrm{T}}$ היא המטריצה המוחלפת של המטריצה $[\mathsf{A}]$, כלומר המטריצה המתקבלת מהמטריצה $[\mathsf{A}]$ על ידי החלפת מצייני השורות במצייני העמודות, ו- $[1]$ היא מטריצת היחידה שאיבריה על האלכסון הם המספר 1 ושאר איבריה מתאפסים. מטריצה המקיימת את המשוואה האחרונה נקראת **מטריצה אורתוגונלית**.

כזכור, הגדרנו גוף קשיח על ידי התכונה שבכל מצביו המרחקים בין נקודות החומר השונות נשארים קבועים, והגדרה זו איפשרה לנו לקבל את כל התכונות שפרטנו עד כה. למעשה, לא כל העתקה שמשמרת מרחקים חייבת להיות סיבוב. העולם המשתקף בתוך מראה, משמר את כל המרחקים והזוויות כמו סיבוב, ולכן אף הוא מקיים את כל התכונות שפרטנו. ברור מניסיוננו, שבשום מצב של גוף קשיח, אין הגוף נראה כהשתקפותו דרך מראה. למשל, ככל שנסובב את כף ידינו הימנית, לא נצליח לגרום לכך שהיא תראה כמו השמאלית. אם כן, בסיבוב, מערכת הצירים הצמודה לגוף תישאר תמיד מערכת צירים ימנית (בהנחה שהיא היתה כזו במצב הייחוס). לעומת זאת במצב של שיקוף, מערכת הצירים הופכת ממערכת ימנית, למערכת שמאלית.

מהגדרתה של מכפלה וקטורית, נובע כי במערכת ימנית וקטורי היחידה מקיימים את המשוואה $\mathbf{J}\times\mathbf{K} = \mathbf{I}$, ואילו במערכת שמאלית $\mathbf{J}\times\mathbf{K} = -\mathbf{I}$. על ידי הכפלת משוואות אלו סקלרית ב-$\mathbf{I}$ נקבל

$\mathbf{I}\cdot(\mathbf{J}\times\mathbf{K}) = 1$, עבור מערכת ימנית,

$\mathbf{I}\cdot(\mathbf{J}\times\mathbf{K}) = -1$, עבור מערכת שמאלית.

כזכור, ביטוי מהצורה $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w})$ נקרא מכפלה סקלרית משולשת (ראה סעיף 5.2.2 העוסק במכפלה הסקלרית המשולשת), ועל ידי הצגת המכפלה הוקטורית בסוגריים על ידי דטרמיננט, ניתן להראות בקלות כי

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}.$$

אם ניישם זאת במכפלה המשולשת של וקטורי הבסיס במערכת הגוף, כאשר אנו משתמשים בעובדה שרכיביהם הם קוסינוסי הכיוונים, נקבל

$$\mathbf{I}\cdot(\mathbf{J}\times\mathbf{K}) = \begin{vmatrix} A_{xX} & A_{yX} & A_{zX} \\ A_{xY} & A_{yY} & A_{zY} \\ A_{xZ} & A_{yZ} & A_{zZ} \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} A_{xX} & A_{xY} & A_{xZ} \\ A_{yX} & A_{yY} & A_{yZ} \\ A_{zX} & A_{zY} & A_{zZ} \end{vmatrix}.$$

בשורה השניה השתמשנו בעובדה שניתן להחליף את מצייני השורות והעמודות במטריצה, מבלי לשנות את הדטרמיננט שלה. קיבלנו אם כן כי

$$\mathbf{I}\cdot(\mathbf{J}\times\mathbf{K}) = |\mathsf{A}|.$$

אנו רשאים להסיק מכך, שהדטרמיננט של מטריצה קוסינוסי הכיוון הוא 1, או -1, בהתאם לאופי המצב:

$|\mathsf{A}| = 1$, מתאר סיבוב , $|\mathsf{A}| = -1$, מתאר שיקוף.

נניח שאנו מזהים את מערכת היחוס עם מערכת המרחב, כך שאנו יכולים להשוות וקטורים בגוף במצב היחוס ובמצב הנוכחי. אחת התוצאות העקריות הנובעות מהתכונות שפרטנו עד כה, היא שעבור כל סיבוב של הגוף, קיים במערכת הגוף ישר, כך שכל הוקטורים המקבילים לו אינם משתנים בכיוונם בזמן הסיבוב (כמובן שהם אינם משתנים בגודלם). ישר זה נקרא **ציר הסיבוב** ואת קיומו אנו לא נוכיח. למשל, בדוגמה הקודמת, ציר הסיבוב היה הציר y . גם עבור סיבוב המתואר באמצעות סיבובים במספר שלבים וצירים, כמו בזוויות אוילר, יש בסופו של דבר ציר אחד שהסיבוב הכולל שקול לסיבוב סביבו (כמובן שציר הסיבוב אינו אחד מצירי

הקואורדינטות בדרך כלל). המונח ציר הסיבוב, מתייחס כמובן רק לאותו מרכיב במצב הגוף הקשור בסיבוב, כלומר, המטריצה [A] . אם הנקודה A לא נעה כך שהגוף סובב סביב נקודה קבועה, טבעי לייצג את ציר הסיבוב על ידי וקטור יחידה $\hat{\mathbf{u}}$ היוצא מהנקודה A , ומצביע בכיוון המקביל לציר. מכיוון שבעת הפעלת המטריצה [A] על הוקטור $\hat{\mathbf{u}}$, הוקטור ישאר ללא שינוי , $[A]\{\hat{u}\} = \{\hat{u}\} = 1\{\hat{u}\}$. במינוח של אלגברה ליניארית, $\hat{\mathbf{u}}$ הוא וקטור עצמי של מטריצת הסיבוב [A], בעל ערך עצמי השווה ל-1.

4.1.11 דרגות החופש של גוף קשיח

כזכור, מספר דרגות החופש שיש למערכת מכנית, הוא מספר הפרמטרים המינימלי הדרוש על מנת להגדיר מצב כלשהו שלה. ראינו בסעיף 4.1.8, שעל מנת להגדיר את מצב הגוף יש צורך לציין את הוקטור $\mathbf{r}_A$ ואת הוקטורים $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$. הוקטור $\mathbf{r}_A$ מוגדר באמצעות שלושת רכיביו יחסית למערכת המרחב, ואילו וקטורי היחידה $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$ מוגדרים באמצעות תשעת קוסינוסי הכיוונים. אולם בעוד שלושת רכיבי $\mathbf{r}_A$ הם בלתי תלויים הרי קוסינוסי הכיוון מקיימים את ששת הקשרים המפורטים בסעיף הקודם. נובע מכך שרק שלושה מהם אינם תלויים זה בזה.

את העובדה שמספיקים שלושה פרמטרים על מנת להגדיר את וקטורי היחידה, ניתן לתאר גם באופן הבא. בכדי להגדיר וקטור יחידה $\mathbf{n}$, יש צורך בשני רכיבים שלו משום שרכיביו מקיימים את התנאי $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$. לכן מספיקים שני מספרים בכדי להגדיר את וקטור היחידה $\mathbf{I}$. בכדי להגדיר את וקטור היחידה $\mathbf{J}$ יש צורך במספר אחד בלבד, משום שאנו יודעים שהוא נמצא במישור הניצב ל-$\mathbf{I}$. עובדת הניצבות יכולה לשמש כאילוץ מתמטי נוסף $\mathbf{I}\cdot\mathbf{J} = 0$, או לחילופין, אנו יכולים להשתמש בעובדה שאנו יודעים את המישור בו הוקטור $\mathbf{J}$ נמצא, בכדי לתאר את כיוונו באמצעות ציון זווית. ברגע שהוקטורים $\mathbf{I}$ ו-$\mathbf{J}$ ידועים, הוקטור $\mathbf{K}$ הוא זה המשלים אותם לשלשה ימנית וניתן לחשבו על ידי המכפלה הוקטורית.

באופן נוסף, ניתן לאמר שאנו זקוקים לשני פרמטרים על מנת להגדיר את וקטור היחידה בכיוון ציר הסיבוב ולפרמטר נוסף על מנת להגדיר את זווית הסיבוב סביב אותו ציר. דוגמה אחרת לשלושה פרמטרים שמגדירים את סיבוב הגוף ראינו בזוויות אוילר. אכן, העובדה שנדרשים שלושה פרמטרים להגדרת סיבוב הגוף, מצדיקה את תאור הסיבוב בעזרת שלוש זוויות אוילר, לא יותר ולא פחות.

לגוף קשיח יש אם כן שש דרגות חופש אשר שלוש מהן קשורות בסיבוב ושלוש קשורות בהזזת נקודת היחוס.

4.2.1 המהירות הזוויתית ומהירות נקודת חומר בגוף

מקומה של נקודת החומר, אשר הקואורדינטות שלה במצב היחוס הן X_0, Y_0, Z_0 , נתון על ידי המשוואה

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_A + \mathbf{R} = \mathbf{r}_A + X_0\mathbf{I} + Y_0\mathbf{J} + Z_0\mathbf{K} ,$$

כפי שהראינו בסעיף 4.1.4. בזמן תנועה, הוקטורים $\mathbf{K}$, $\mathbf{J}$, $\mathbf{I}$, $\mathbf{r}_A$ תלויים בזמן, ולכן עבור הזמן t

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_A(t) + \mathbf{R}(t) = \mathbf{r}_A(t) + X_0\mathbf{I}(t) + Y_0\mathbf{J}(t) + Z_0\mathbf{K}(t) .$$

בכדי למצוא את מהירות נקודת החומר הנדונה עלינו לגזור לפי הזמן את הביטוי הקודם. נקבל,

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \dot{\mathbf{r}}_A(t) + \dot{\mathbf{R}}(t) = \dot{\mathbf{r}}_A(t) + X_0\dot{\mathbf{I}}(t) + Y_0\dot{\mathbf{J}}(t) + Z_0\dot{\mathbf{K}}(t) .$$

(אין צורך לגזור את הקואורדינטות במצב היחוס, משום שהן נשארות קבועות, כל עוד אנו דנים בנקודת חומר אחת מסוימת בגוף.) אנו מסיקים מכך, שאם נתונים ברגע מסוים הוקטורים $\dot{\mathbf{K}}$, $\dot{\mathbf{J}}$, $\dot{\mathbf{I}}$, $\dot{\mathbf{r}}_A$, ניתן למצוא את המהירות של נקודת חומר כלשהי, על ידי הצבת הקואורדינטות שלה במצב היחוס, X_0, Y_0, Z_0 .

אנו זקוקים לשלושה פרמטרים על מנת לתאר את $\dot{\mathbf{r}}_A$, ולכאורה אנו זקוקים לתשעה פרמטרים נוספים על מנת לתאר את הנגזרות של וקטורי היחידה במערכת הגוף. אולם, כפי שהיה בתאור רכיביהם של וקטורי הבסיס שייצגו את הסיבוב של הגוף הקשיח, גם כאן, בתאור נגזרותיהם, התכונות השונות של וקטורי הבסיס, יאפשרו לנו להגדיר את הנגזרות באמצעות שלושה פרמטרים כפי שנתאר מיד.

נדון בוקטור $\dot{\mathbf{I}}$. רכיביו בבסיס $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$ (אנו נשמיט לעיתים קרובות את ציון התלות בזמן t בכדי למנוע סירבול בכתיבה) הם המכפלות הסקלריות $\dot{\mathbf{I}}\cdot\mathbf{K}$, $\dot{\mathbf{I}}\cdot\mathbf{J}$, $\dot{\mathbf{I}}\cdot\mathbf{I}$ בהתאמה. לפיכך,

$$\dot{\mathbf{I}} = (\dot{\mathbf{I}}\cdot\mathbf{I})\mathbf{I} + (\dot{\mathbf{I}}\cdot\mathbf{J})\mathbf{J} + (\dot{\mathbf{I}}\cdot\mathbf{K})\mathbf{K} .$$

בסעיף 1.4.4 הוכחנו שעבור וקטור $\mathbf{v}$ בעל אורך קבוע, $\dot{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{v} = 0$, כלומר הנגזרת ניצבת לוקטור. אם ניישם זאת עבור הוקטור $\mathbf{I}$ (שאורכו תמיד יחידה) , במשוואה האחרונה האיבר הראשון ייפול. כמו כן מתקיים, $\mathbf{K} = -\mathbf{J}\times\mathbf{I}$, $\mathbf{J} = \mathbf{K}\times\mathbf{I}$, ולכן ניתן לכתוב:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{I}} &= (\dot{\mathbf{I}}\cdot\mathbf{J})\mathbf{K}\times\mathbf{I} - (\dot{\mathbf{I}}\cdot\mathbf{K})\mathbf{J}\times\mathbf{I} \\ &= [(\dot{\mathbf{I}}\cdot\mathbf{J})\mathbf{K} - (\dot{\mathbf{I}}\cdot\mathbf{K})\mathbf{J}]\times\mathbf{I} .\end{aligned}$$

בנוסף, על ידי גזירה של הביטוי $\mathbf{I}\cdot\mathbf{K} = 0$, לפי הכלל של נגזרת מכפלה, נקבל $\dot{\mathbf{I}}\cdot\mathbf{K} + \mathbf{I}\cdot\dot{\mathbf{K}} = 0$. נובע מכך כי, $\dot{\mathbf{I}}\cdot\mathbf{K} = -\dot{\mathbf{K}}\cdot\mathbf{I}$, ולכן המשוואה מקבלת את הצורה

$$\dot{\mathbf{I}} = [(\dot{\mathbf{I}}\cdot\mathbf{J})\mathbf{K} + (\dot{\mathbf{K}}\cdot\mathbf{I})\mathbf{J}]\times\mathbf{I} .$$

הביטוי $(\dot{\mathbf{J}}\cdot\mathbf{K})\mathbf{I}\times\mathbf{I}$ מתאפס וניתן להוסיף אותו למשוואה האחרונה:

$$\dot{\mathbf{I}} = [(\dot{\mathbf{I}}\cdot\mathbf{J})\mathbf{K} + (\dot{\mathbf{J}}\cdot\mathbf{K})\mathbf{I} + (\dot{\mathbf{K}}\cdot\mathbf{I})\mathbf{J}]\times\mathbf{I} .$$

נסמן על ידי $\boldsymbol{\omega}$ את הוקטור שבתוך הסוגריים המרובעות בביטוי האחרון,

$$\boldsymbol{\omega} = (\dot{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{J})\mathbf{K} + (\dot{\mathbf{J}} \cdot \mathbf{K})\mathbf{I} + (\dot{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{I})\mathbf{J} \; .$$

הוקטור $\boldsymbol{\omega}$ נקרא **המהירות הזוויתית** ואנו הוכחנו את הביטוי

$$\dot{\mathbf{I}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I} \; .$$

אנו שמים לעובדה, שאם בביטוי עבור הוקטור $\boldsymbol{\omega}$, אנו מחליפים את סימני וקטורי היחידה בסדר ציקלי, כלומר, $\mathbf{K}$ הופך ל-$\mathbf{J}$, $\mathbf{J}$ הופך ל-$\mathbf{I}$ ו-$\mathbf{I}$ הופך ל-$\mathbf{K}$, הביטוי אינו משתנה. הדבר מאפשר לנו להשתמש בפיתוח הקודם לצורך חישוב $\dot{\mathbf{J}}$ ו-$\dot{\mathbf{K}}$. נניח שברצוננו לחשב את $\dot{\mathbf{J}}$. אנו יכולים לשנות את שמו של הוקטור $\mathbf{J}$ ל-$\mathbf{I}'$, את שם הוקטור $\mathbf{K}$ ל-$\mathbf{J}'$ ואת שם הוקטור $\mathbf{I}$ ל-$\mathbf{K}'$ כך שהמערכת נישארת מערכת ימנית. בשימוש השמות החדשים של וקטורי היחידה, אנו בעצם מעוניינים לחשב את $\dot{\mathbf{I}}'$, ועבורו ניתן לרשום:

$$\dot{\mathbf{I}}' = [(\dot{\mathbf{I}}' \cdot \mathbf{J}')\mathbf{K}' + (\dot{\mathbf{J}}' \cdot \mathbf{K}')\mathbf{I}' + (\dot{\mathbf{K}}' \cdot \mathbf{I}')\mathbf{J}'] \times \mathbf{I}' \; ,$$

על סמך הנוסחה למעלה. כעת עלינו לחזור לשמות המקוריים של וקטורי הבסיס, כך שבנוסחה למעלה $\dot{\mathbf{I}}'$ יהפוך ל-$\dot{\mathbf{J}}$, $\mathbf{I}'$ יהפוך ל-$\mathbf{J}$ וכו'. במעבר זה, הביטוי עבור $\boldsymbol{\omega}$ ישאר ללא שינוי, ולכן אנו מסיקים כי

$$\dot{\mathbf{J}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J} \; .$$

(כמובן שניתן להוכיח את הנוסחה הזו גם על ידי חזרה על התהליך דרכו קיבלנו את הנוסחה ל-$\dot{\mathbf{I}}$.) באופן זהה מתקבל

$$\dot{\mathbf{K}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} \; .$$

אנו מסיקים משלוש המשוואות האחרונות, שמספיקים שלושה פרמטרים, שלושת רכיבי הוקטור $\boldsymbol{\omega}$, בכדי לחשב את הנגזרות של וקטורי הבסיס.

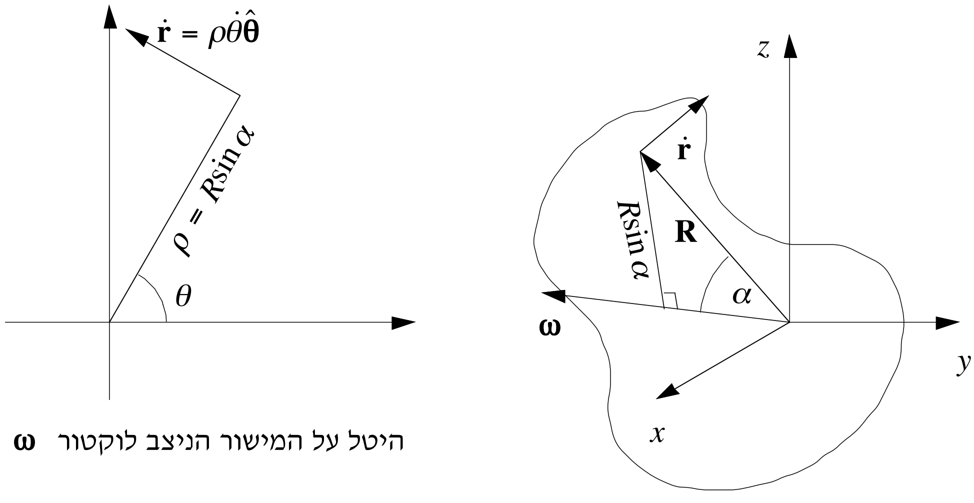
על ידי שימוש בוקטור המהירות הזוויתית ניתן אם כן לכתוב

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}} &= X_0\dot{\mathbf{I}} + Y_0\dot{\mathbf{J}} + Z_0\dot{\mathbf{K}} = X_0\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I} + Y_0\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J} + Z_0\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} \\ &= \boldsymbol{\omega} \times (X_0\mathbf{I} + Y_0\mathbf{J} + Z_0\mathbf{K}) \; , \end{aligned}$$

ומכיוון שהביטוי בסוגריים הוא פשוט הווקטור $\mathbf{R}$ קיבלנו עבור נקודת החומר הנדונה

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \\ \dot{\mathbf{r}} &= \dot{\mathbf{r}}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \; . \end{aligned}}$$

בכדי להבין את הסיבה לכך שהוקטור $\boldsymbol{\omega}$, אותו הגדרנו בצורה פורמלית, נקרא מהירות זוויתית, נדון במקרה בו מהירות הנקודה A מתאפסת, ולכן $\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$. המהירות $\dot{\mathbf{r}}$ נמצאת במישור הניצב לוקטור $\boldsymbol{\omega}$, כיוונה יהיה ניצב להיטל של הוקטור $\mathbf{R}$ על אותו מישור, וגודלה יהיה שווה למכפלת ההיטל בגודלה של $\boldsymbol{\omega}$ (ראה תרשים 10 בצד ימין).



היטל על המישור הניצב לוקטור $\boldsymbol{\omega}$

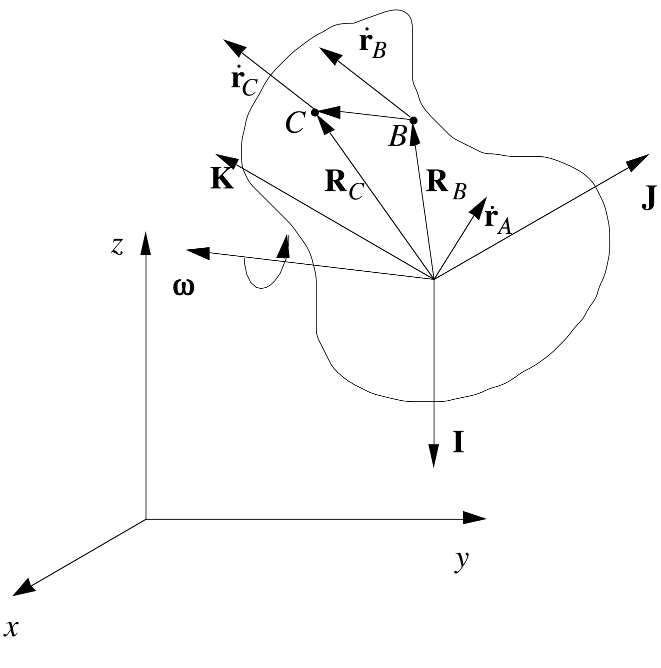
$\dot{r} = \dot{\theta}R\sin\alpha$ $\dot{r} = \omega R\sin\alpha$

תרשים 10

נתבונן בהיטל (צד שמאל בתרשים), על המישור הניצב לוקטור $\boldsymbol{\omega}$, ונתאר אותו בשימוש בקואורדינטות פולריות כך שהיטל הוקטור $\boldsymbol{\omega}$ הוא הראשית. נקודה הנמצאת במרחק קבוע, $\rho = R\sin\alpha$ מהוקטור $\boldsymbol{\omega}$, תנוע במהירות זהה לזו של החלקיק אליו מצביע $\mathbf{R}$, אם עבור תאור תנועתה בקואורדינטות פולריות, $\dot{\theta} = \omega$.

4.2.2 ישרים שווי מהירות

עבור שתי נקודות חומר B, C אשר הוקטור $\mathbf{R}_C - \mathbf{R}_B$, המקשר אותן בזמן t מקביל ל-$\boldsymbol{\omega}$, מתקיים



תרשים 11

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{r}}_C &= \dot{\mathbf{r}}_A + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}_C \\
&= \dot{\mathbf{r}}_A + \boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{R}_B + \mathbf{R}_C - \mathbf{R}_B) \\
&= \dot{\mathbf{r}}_A + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}_B + \boldsymbol{\omega}\times(\mathbf{R}_C - \mathbf{R}_B) \\
&= \dot{\mathbf{r}}_A + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}_B \\
&= \dot{\mathbf{r}}_B \quad ,
\end{aligned}
$$

כאשר בשורה הרביעית השתמשנו בהנחה ש-$\boldsymbol{\omega}$ והוקטור $\mathbf{R}_C - \mathbf{R}_B$ מקבילים, כך שמכפלתם הוקטורית מתאפסת (ראה תרשים 11).

אנו מסיקים אם כן, שישרים המקבילים לוקטור $\boldsymbol{\omega}$ מכילים נקודות חומר הנעות רגעית במהירות שווה.

4.2.3 מרכז רגעי וציר רגעי

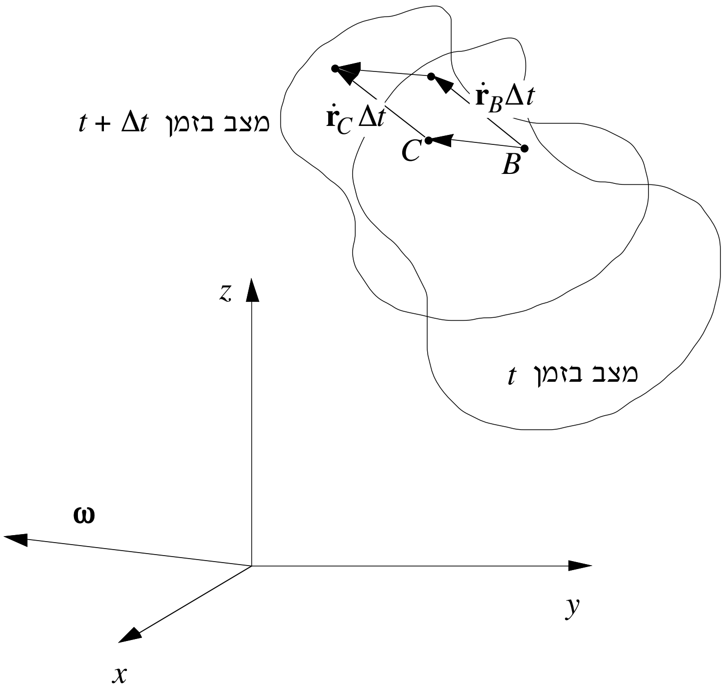
בסעיף 4.1.10 טענו, כי כאשר אנו מזהים את מערכת היחוס עם מערכת המרחב, לכל סיבוב של גוף קשיח יש ציר, כך שוקטורים בין שתי נקודות חומר, המקבילים לציר במצב היחוס, נשארים מקבילים לציר במצב הסופי. נתייחס למצב הגוף בזמן t כמצב יחוס, ונדון במצב הגוף בזמן $t+\Delta t$, עבור פרק זמן קצר מאוד Δt. מכיון שהמהירויות בזמן t של החלקיקים B ו-C הנמצאים על ישר המקביל ל-$\boldsymbol{\omega}$ שוות, התזוזות שלהם בפרק הזמן Δt (מכפלת וקטורי המהירות ב-Δt) גם כן תהינה שוות. כתוצאה מכך הוקטור $\mathbf{R}_C(t+\Delta t) - \mathbf{R}_B(t+\Delta t)$ יהיה מקביל לוקטור $\mathbf{R}_C(t) - \mathbf{R}_B(t)$. כלומר, במצבו החדש של הגוף, הישר המחבר את הנקודות B ו-C נשאר מקביל לישר המחבר את מקומות הנקודות הללו במצב היחוס (בזמן t). ניתן להסיק מכך שעבור התנועה בין הזמנים t ו-$t+\Delta t$, הגוף מסתובב סביב ישר המקביל ל-$\boldsymbol{\omega}$ (ראה תרשים 12).

אם הנקודה A נמצאת במקום קבוע, או אפילו אם מהירותה מתאפסת רגעית, הישר המקביל ל-$\boldsymbol{\omega}$ העובר דרכה יקרא **ציר הסיבוב הרגעי**, והנקודות השונות עליו יקראו **מרכז רגעי**. השם מוצדק משום שמהירויות כל הנקודות על הציר מתאפסות. אם מהירותה של נקודה A אינה מתאפסת ברגע הנדון, ניתן לחפש נקודה אחרת C אשר מהירותה מתאפסת. נקודה כזו תהיה מרכז רגעי, והישר המקביל ל-$\boldsymbol{\omega}$ העובר דרך C יהיה ציר סיבוב רגעי, משום שמהירויות כל הנקודות עליו מתאפסות. הנקודה C אינה חייבת להיות נקודה ממשית בגוף, ולצורך הגדרת מרכז רגעי וציר סיבוב רגעי, אנו ממשיכים את הגוף באופן דמיוני לאינסוף. הנקודה C צריכה אם כן לקיים

$$\dot{\mathbf{r}}_C = \dot{\mathbf{r}}_A + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}_C = \mathbf{0} \, ,$$

כלומר, את המשוואה הבאה

$$\dot{\mathbf{r}}_A = -\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}_C \, .$$



תרשים 12

כדי שלמשוואה זו יהיה פתרון, דרוש ש-$\dot{\mathbf{r}}_A$ יהיה ניצב לוקטור $\boldsymbol{\omega}$, כי הרי הוא מתקבל על ידי מכפלה וקטורית. מכיון שאין תלות בין $\dot{\mathbf{r}}_A$ ל-$\boldsymbol{\omega}$, התנאי שהם ניצבים זה לזה לא חייב להתקיים, ומרכז רגעי כפי שהגדרנו לא קיים בהכרח. כזכור מסעיף 3.2.7, גם אם התנאי אכן מתקיים, לא ניתן לחלץ את $\mathbf{R}_C$ באופן יחיד, כי רק שתים מתוך שלושת המשוואות הסקלריות המתקבלות הן בלתי תלויות. מתקבלת משוואת הישר - משוואת ציר הסיבוב הרגעי.

במקרה הכללי בו תנאי הניצבות בין $\dot{\mathbf{r}}_A$ ל-$\boldsymbol{\omega}$ אינו מתקיים, ניתן לבצע תהליך הדומה לתהליך המעבר לדינאמו, בסטטיקה של מערכת כוחות במרחב. כלומר, אנו נפרק את וקטור המהירות $\dot{\mathbf{r}}_A$ לשני רכיבים: $\dot{\mathbf{r}}_A^{\parallel}$ - הרכיב המקביל ל-$\boldsymbol{\omega}$, ו- $\dot{\mathbf{r}}_A^{\perp}$ - רכיב המהירות הניצב ל-$\boldsymbol{\omega}$. ניתן לחשב את הרכיבים בעזרת המשוואות:

$$\dot{\mathbf{r}}_A^{\parallel} = (\dot{\mathbf{r}}_A \cdot \hat{\boldsymbol{\omega}})\hat{\boldsymbol{\omega}} = \frac{(\dot{\mathbf{r}}_A \cdot \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega}}{|\boldsymbol{\omega}|^2} ,$$

$$\dot{\mathbf{r}}_A^{\perp} = \dot{\mathbf{r}}_A - \dot{\mathbf{r}}_A^{\parallel} .$$

בעוד שהרכיב $\dot{\mathbf{r}}_A^{\parallel}$ ניצב למכפלה הוקטורית $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}_C$, ניתן יהיה למצוא פתרונות למשוואה

$$\dot{\mathbf{r}}_A^{\perp} = -\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}_C ,$$

כי תנאי הניצבות בין $\dot{\mathbf{r}}_A^{\perp}$ ל-$\boldsymbol{\omega}$ מתקיים. את המשוואה יקיימו נקודות על ישר המקביל ל-$\boldsymbol{\omega}$, ומהירות כל הנקודות תהיה

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \dot{\mathbf{r}}_A + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}_C\\ &= \dot{\mathbf{r}}_A^{\parallel} + \dot{\mathbf{r}}_A^{\perp} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}_C\\ &= \dot{\mathbf{r}}_A^{\parallel} - \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}_C + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}_C\\ , \quad &= \dot{\mathbf{r}}_A^{\parallel}\end{aligned}$$

כאשר השתמשנו בסימון $\mathbf{R}_C$ בכדי לציין שהנקודות על הישר פותרות את המשוואה הקודמת. אנו יכולים להכליל את המושג של ציר סיבוב רגעי, ולאמר שהישר המכיל את הנקודות שמהירותן מקבילה ל-$\boldsymbol{\omega}$, הוא ציר הסיבוב הרגעי במקרה הכללי ביותר.

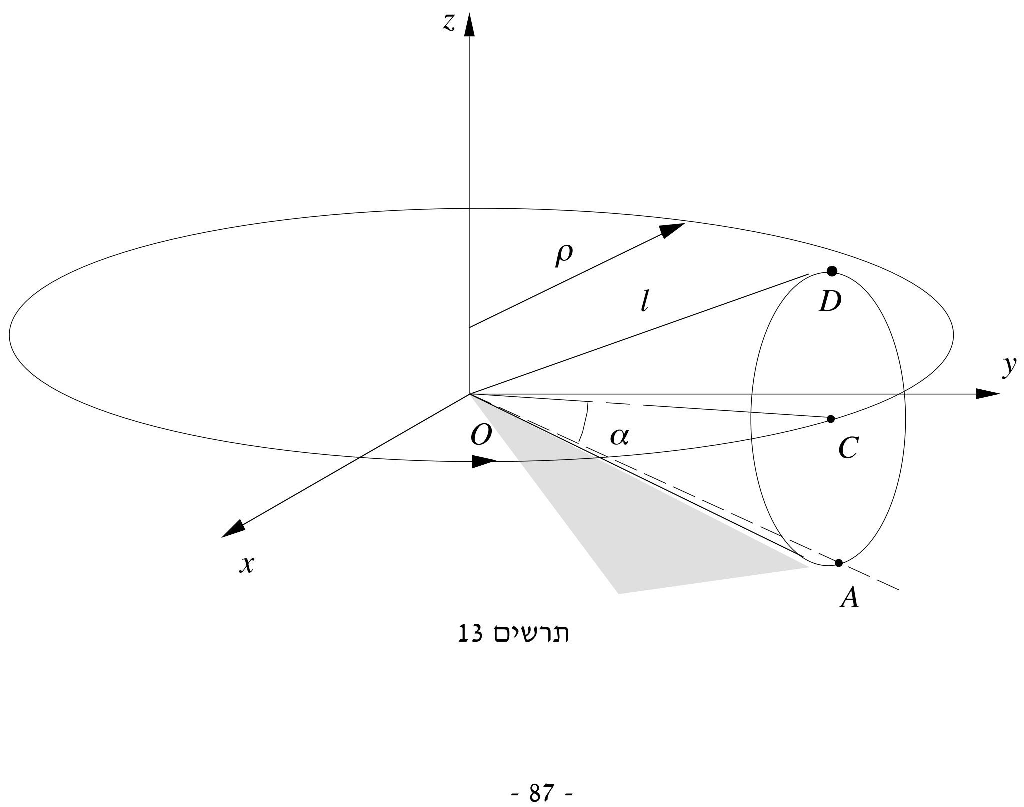
נכתוב כעת את משוואת המהירות של נקודה כלשהי, כאשר במקום להתייחס לנקודה A אנו מתייחסים לנקודה C על ציר הסיבוב (כך שמהירותה מקבילה ל-$\boldsymbol{\omega}$):

$$.\ \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_C + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}$$

האיבר הראשון באגף ימין הוא וקטור המקביל ל- $\boldsymbol{\omega}$, והאיבר השני ניצב ל- $\boldsymbol{\omega}$. אנו מסיקים שהמהירות של נקודה כלשהי בגוף, מורכבת משני רכיבים: רכיב אחד מקביל ל-$\boldsymbol{\omega}$, והוא שווה למהירות הנקודות על הציר הרגעי, ורכיב שני שנובע מהסיבוב, או המהירות הזוויתית, והוא כמובן ניצב ל-$\boldsymbol{\omega}$.

4.2.4 דוגמה

החרוט המתואר בתרשים 13 מתגלגל על מישור אופקי (מישור x, y בתרשים), כך שקודקודו נמצא בנקודה קבועה O , וצירו סובב n סיבובים בשניה בתנועה קצובה כנגד מגמת השעון, סביב האנך למישור בנקודה O. אורך הקו היוצר של החרוט הוא l , והזווית בין צירו לבין הקו היוצר היא α . דרוש למצוא את וקטור המהירות הזוויתית $\boldsymbol{\omega}$ ואת המהירות של הנקודה D .



תרשים 13

פתרון: הנקודה העקרונית אליה יש לשים לב בדוגמה זו, היא העובדה שציר הסיבוב הרגעי הוא הישר OA. מכיון שהחרוט מתגלגל על המישור האופקי, אין מהירות יחסית בין הנקודות הבאות במגע עם המישור, ולכן, כל נקודות החומר, הנמצאות רגעית על המישור נמצאות במנוחה (באותו הרגע), ונובע מכך שהישר OA הוא ציר סיבוב רגעי. אנו מסיקים אם כן שהוקטור $\boldsymbol{\omega}$ מצביע בכיוון ישר זה.

נקודת החומר C נעה בתנועה מישורית, ואם נשתמש בקואורדינטות פולריות במישור אופקי המכיל את מסלולה (המתואר בתרשים 13), הרי נתון כי $\dot{\theta} = 2\pi n \text{ rad/s}$. הרדיוס הקבוע ρ של המסלול יהיה $\rho = OC\cos\alpha$, ומכיון ש- $OC = l\cos\alpha$, מתקבל $\rho = l\cos^2\alpha$. מהירות הנקודה C תהיה לכן

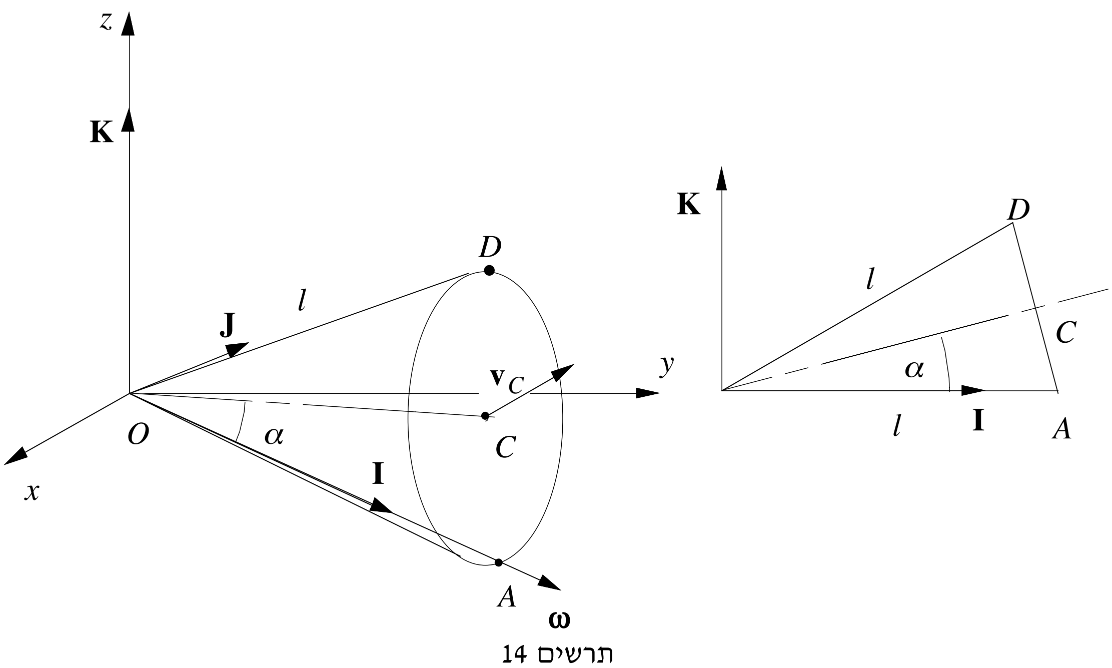
$$v_C = \rho\dot{\theta} = 2\pi n l\cos^2\alpha \, .$$

מאידך,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_C &= \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}_C \\ &= \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}_{OC} \, , \end{aligned}$$

כאשר השתמשנו בעובדה שמהירות הקודקוד מתאפסת.

מכיון שלמיקום הישר OA במישור x, y אין כל משמעות, אנו יכולים לקבוע את מערכת צירי הגוף כך, שוקטור היחידה $\mathbf{I}$ נמצא לאורך הישר OA, וקטור היחידה $\mathbf{J}$ ניצב לו ונמצא במישור האופקי, ווקטור היחידה $\mathbf{K}$ מתלכד רגעית עם ציר z (ראה תרשים 14). ברור שזמן קצר לאחר המצב המתואר בתרשים, וקטור היחידה $\mathbf{I}$ כבר לא ימצא במישור האופקי, ווקטור היחידה $\mathbf{K}$ לא יתלכד אם האנך למישור.



תרשים 14

בשימוש מערכת הגוף אנו יכולים לכתוב

$$\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{I} ,$$
$$\mathbf{R}_{OC} = l\cos^2\alpha\mathbf{I} + l\sin\alpha\cos\alpha\mathbf{K} ,$$
$$\mathbf{v}_C = v_C\mathbf{J} = 2\pi n l\cos^2\alpha\mathbf{J} .$$

כאשר אנו מציבים את הביטויים הללו למשוואה הוקטורית של מהירות הנקודה C , ומשתמשים בגודל המהירות שמצאנו, מתקבל

$$\begin{aligned} 2\pi n l\cos^2\alpha\mathbf{J} &= \begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{J} & \mathbf{K} \\ \omega & 0 & 0 \\ l\cos^2\alpha & & l\sin\alpha\cos\alpha \end{vmatrix} \\ &= -\omega l\sin\alpha\cos\alpha\mathbf{J} , \end{aligned}$$

ומכאן

$$\omega = -2\pi n\cot\alpha ,$$
$$\boldsymbol{\omega} = -2\pi n\cot\alpha\mathbf{I} .$$

כעת ניתן למצוא את מהירות הנקודה D :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_D &= \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_{OD} \\ &= (-2\pi n\cot\alpha\mathbf{I}) \times (l\cos 2\alpha\mathbf{I} + l\sin 2\alpha\mathbf{K}) \\ &= 4\pi n l\cos^2\alpha\mathbf{J} , \end{aligned}$$

כאשר בשורה השניה השתמשנו בעובדה שמהירות הראשית מתאפסת, וכן $\mathbf{R}_{OD} = l\cos 2\alpha\mathbf{I} + l\sin 2\alpha\mathbf{K}$ (השתמשנו גם בביטוי ל-$\sin 2\alpha$ בכדי לקבל את התוצאה הסופית).

4.2.5 הגדרת מהירות זוויתית של גוף על סמך מהירותן של שתי נקודות עליו

נניח שאנו יודעים את מהירותן של שתי נקודות חומר A ו-B ברגע מסוים. נבדוק מה ניתן ללמוד על המהירות הזוויתית של הגוף הקשיח על סמך אינפומרציה זו. ניתן לבחור את הנקודה A כראשית מערכת הגוף (שהרי בחירה זו הינה שרירותית לחלוטין), ואז $\mathbf{R}_B = \mathbf{R}_{AB}$, ומשוואת המהירות של נקודה B תהיה:

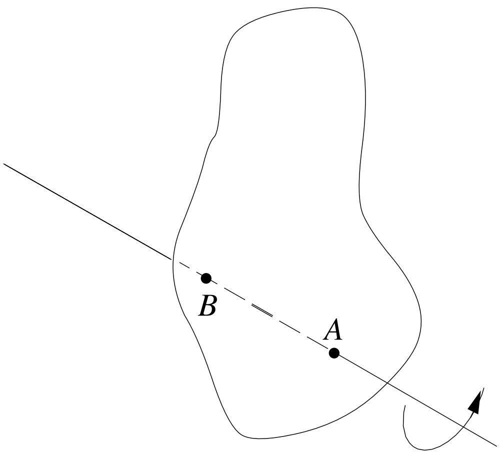
$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_{AB} .$$

במשוואה זו, הנעלם הוא הוקטור $\boldsymbol{\omega}$, וניתן לכתוב עבורו את המשוואה

$$\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_{AB} .$$

זוהי משוואה מהסוג $\mathbf{a} \times \mathbf{u} = \mathbf{b}$ בה דנו בסעיף 3.2.7. כזכור, לא ניתן לפתור את $\boldsymbol{\omega}$ באופן חד משמעי ממשוואה זו, משום שרק שתיים מתוך שלוש המשוואות הסקלריות המתקבלות הן בלתי תלויות. מכפלת הרכיב של $\boldsymbol{\omega}$ המקביל ל-$\mathbf{R}_{AB}$ בוקטור $\mathbf{R}_{AB}$ מתאפסת זהותית, ולכן רכיב זה אינו מוגדר. הדבר ברור מבחינה אינטואיטיבית משום שסיבוב סביב הישר AB לא ישנה את המהירות היחסית של נקודות עליו (ראה תרשים 15). ניתן להגדיר באופן חד משמעי רק את $\boldsymbol{\omega}^{\perp}$, הרכיב של $\boldsymbol{\omega}$ הניצב ל-$\mathbf{R}_{AB}$, על ידי שמוש

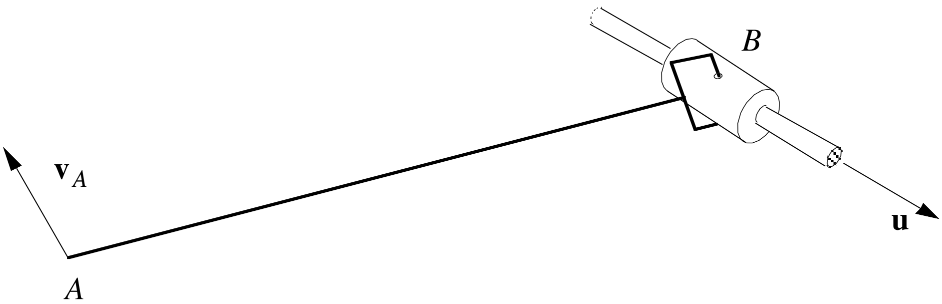
בשתיים מהמשוואות הסקלריות המתקבלות, ובתנאי הניצבות $\boldsymbol{\omega}^{\perp}\cdot\mathbf{R}_{AB}=0$. על מנת להגדיר את $\boldsymbol{\omega}$ באופן חד משמעי יש צורך באינפומציה נוספת כפי שנראה בדוגמאות הבאות.



תרשים 15

4.2.6 דוגמה

בתרשים 16 מתואר מוט AB אשר מחובר באמצעות ציר למחליק B . המחליק חופשי לנוע לאורך מוליך ישר שכיוונו מתואר בתרשים על ידי הוקטור $\mathbf{u}$. ציר הסיבוב של המוט AB יחסית למחליק, ניצב למוט וניצב למחליק. נתון כי יחסית למערכת צירים במרחב, $\mathbf{u}=\mathbf{j}$, $\mathbf{R}_{AB}=-\mathbf{i}+4\mathbf{j}-\mathbf{k}\ \mathrm{m}$, $\mathbf{v}_A=2\mathbf{i}\ \mathrm{m/s}$. דרוש למצוא את מהירות הנקודה B ואת מהירותו הזוויתית $\boldsymbol{\omega}$ של המוט AB .



תרשים 16

פתרון: בעיה זו כמעט מתאימה לכותרת של מציאת המהירות הזוויתית של גוף קשיח (המוט AB) באמצעות המהירות של שתי נקודות עליו, אלא שמהירותה של הנקודה B אינה נתונה. אולם, כיוונה של $\mathbf{v}_B$ ידוע, כי B חייבת לנוע לאורך המחליק שמקביל לוקטור הנתון $\mathbf{u}$, ולכן $\mathbf{v}_B=v_B\mathbf{j}$. אם נכתוב את משוואת המהירות של נקודה על גוף קשיח עבור הנקודה B , כאשר הנקודה A משמשת כראשית מערכת הגוף, נקבל על סמך הסעיף הקודם

$$\mathbf{v}_B-\mathbf{v}_A=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}_{AB}\ .$$

כזכור, ללא שימוש באינפורמציה נוספת, לא ניתן לחלץ ממשוואה זו את $\boldsymbol{\omega}$ באופן חד משמעי אפילו אם מהירותה של B נתונה. אולם בבעיה זו נטפל לאחר מציאת המהירות $\mathbf{v}_B$. מהמשוואה האחרונה ומהגדרתה של מכפלה וקטורית, נובע כי הוקטור $\mathbf{v}_B-\mathbf{v}_A$ ניצב לוקטור $\mathbf{R}_{AB}$ (הדבר נובע גם מהעובדה שהוקטור

$\mathbf{R}_{AB}$ הוא בעל גודל קבוע כפי שהוסבר בסעיף 3.3.5). נובע מכך כי

$$(\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A)\cdot\mathbf{R}_{AB} = 0 .$$

בהצבת הערכים הידועים עבור הוקטורים השונים במשוואה זו נקבל

$$(v_B\mathbf{j} - 2\mathbf{i})\cdot(-\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}) = 2 + 4v_B = 0$$
$$v_B = -0.5 \text{ m/s} .$$

מכאן גם $\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A = -2\mathbf{i} - 0.5\mathbf{j}$ m/s .

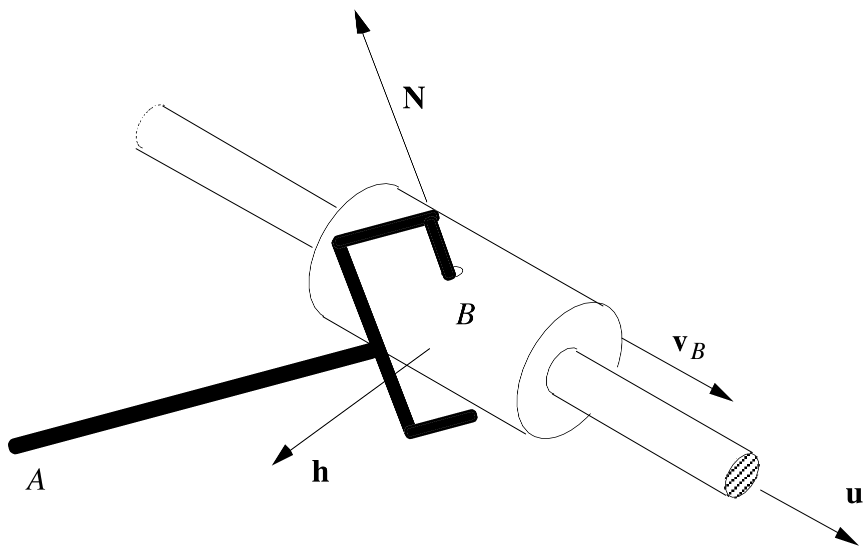
בהצבת הערכים שמצאנו עד כה, למשוואה $\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}_{AB}$, נקבל,

$$\begin{aligned}-2\mathbf{i} - 0.5\mathbf{j} &= \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \omega_x & \omega_y & \omega_z\\ -1 & 4 & -1\end{vmatrix}\\ &= (-\omega_y - 4\omega_z)\mathbf{i} + (\omega_x - \omega_z)\mathbf{j} + (4\omega_x + \omega_y)\mathbf{k}\end{aligned} ,$$

ובהשוואת הרכיבים

$$\begin{aligned}-2 &= -\omega_y \ -4\omega_z\\ -0.5 &= \omega_x \ -\omega_z\\ 0 &= 4\omega_x + \omega_y\end{aligned} .$$

כאמור, רק שתיים מתוך שלוש המשוואות האחרונות הן בלתי תלויות, ובהמשך נשתמש בשתיים האחרונות.



תרשים 17

נותר לנו לקבל מאופן החיבור בין המוט למחליק משוואה נוספת, אשר תאפשר לנו לקבוע את $\boldsymbol{\omega}$ באופן חד משמעי. מאופן החיבור בין המחליק למוט עליו הוא נע, ברור כי המחליק וכתוצאה מכך גם המוט

AB , חופשיים להסתובב סביב $\mathbf{u}$ (ראה תרשים 17). כלומר, ל-$\boldsymbol{\omega}$ יכול להיות רכיב כלשהו בכיוון $\mathbf{u}$. מאופן החיבור בין המוט AB והמחליק, נובע כי המוט חופשי להסתובב גם סביב ציר החיבור המסומן בתרשים על ידי הוקטור $\mathbf{N}$ (שאורכו אינו חשוב לנו). מכאן, ל-$\boldsymbol{\omega}$ יכול להיות רכיב כלשהו בכיוון $\mathbf{N}$.
אנו מסיקים אם כן כי הוקטור $\boldsymbol{\omega}$ יכול להיות וקטור כלשהו במישור שיוצרים הוקטורים $\mathbf{u}$ ו-$\mathbf{N}$. במילים אחרות, אם נסמן על ידי $\mathbf{h}$, וקטור הניצב למישור של $\mathbf{u}$ ו-$\mathbf{N}$, אזי $\boldsymbol{\omega}$ חייבת להיות ניצבת ל-$\mathbf{h}$ ולכן

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{h} = 0 .$$

משוואה זו היא משוואת האילוץ הנובעת מאופן החיבור. נותר לנו לחשב וקטור $\mathbf{h}$ הניצב ל- $\mathbf{u}$ו-$\mathbf{N}$. ברור כי המכפלה הוקטורית בין שני וקטורים אלו ניצבת לשניהם, ולכן אנו יכולים לקחת

$$\mathbf{h} = \mathbf{N} \times \mathbf{u} .$$

את הוקטור $\mathbf{N}$ שבכיוון ציר הסיבוב עלינו לחשב מתוך התנאי שהוא ניצב הן למוט והן למחליק, ולכן,

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \mathbf{R}_{AB} \times \mathbf{u} \\ &= (-\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}) \times \mathbf{j} , \\ \mathbf{N} &= \mathbf{i} - \mathbf{k} . \end{aligned}$$

הוקטור $\mathbf{h}$ יהיה לכן

$$\begin{aligned} \mathbf{h} &= \mathbf{N} \times \mathbf{u} \\ &= (\mathbf{i} - \mathbf{k}) \times \mathbf{j} \\ &= \mathbf{i} + \mathbf{k} , \end{aligned}$$

ומשוואת האילוץ תהיה

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{h} &= (\omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} + \mathbf{k}) , \\ &= \omega_x + \omega_z = 0 . \end{aligned}$$

מהמשוואות (משוואת האילוץ ושתי המשוואות האחרונות מתוך השלוש שקיבלנו על סמך $\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_{AB}$)

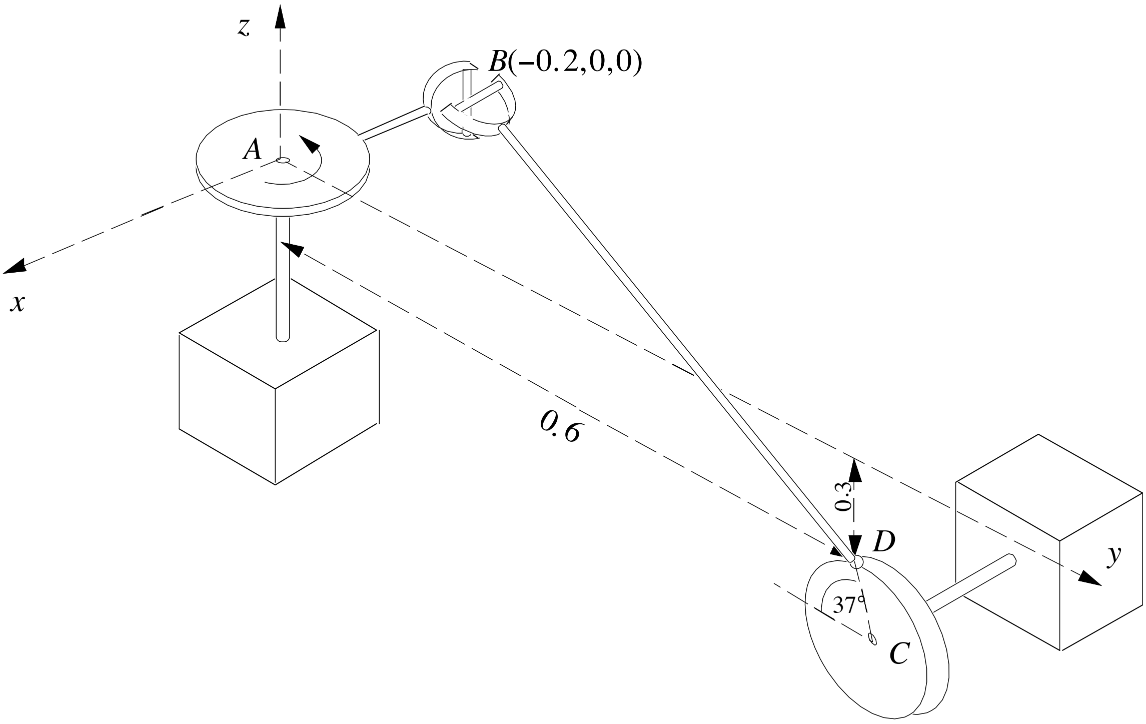
$$\begin{aligned} 0 &= \omega_x \qquad +\omega_z \\ -0.5 &= \omega_x \qquad -\omega_z \\ 0 &= 4\omega_x + \omega_y , \end{aligned}$$

אנו מקבלים $\omega_x = -0.25 \text{ rad/s}$, $\omega_y = 1 \text{ rad/s}$, $\omega_z = 0.25 \text{ rad/s}$.

הערה: בדוגמה הקודמת (דוגמה 4.2.4), השתמשנו במערכת הגוף בכדי לתאר את רכיבי הוקטורים השונים ולבצע את החישובים. לעומת זאת, בדוגמה זו השתמשנו במערכת המרחב. הדבר לא צריך להפריע משום שלצורך תאור וקטור במרחב, או לצורך ביצוע חישובים אלגבריים שונים, אין זה משנה איזו מערכת צירים משמשת אותנו. ההבדל העקרוני בין מערכות הצירים, בא לידי ביטוי כאשר אנו מבצעים פעולות של גזירה. במקרה זה, העובדה שוקטורי הבסיס של מערכת הגוף אינם קבועים היא משמעותית, ויש להשתמש במשוואות שקיבלנו ואלו שנקבל בהמשך (סעיף 4.2.9).

דוגמה 4.2.7

בתרשים 18 מתואר מכניזם המורכב משני גלגלים שמרכזיהם בנקודות A ו-C בהתאמה, אשר רדיוסיהם שווים $0.1\ \mathrm{m}$ (כל המידות האחרות בתרשים גם הן במטרים), ואשר סובבים סביב הצירים z ו-x בהתאמה. לגלגל A מחובר באופן קשיח מוט, אשר מחובר מצידו האחר למיפרק האוניברסלי B. המפרק האוניברסלי מחובר למוט BD, אשר מחובר באמצעות פרק כדורי D לגלגל C. המהירות הזוויתית של הגלגל A במצב הנתון היא $\omega_A = 30\ \mathrm{rad/s}$. דרוש לחשב עבור המצב הנתון, את המהירות הזוויתית ω_C של הגלגל C, ואת המהירות הזוויתית $\boldsymbol{\omega}$ של המוט BD.



תרשים 18

שים לב שהמפרק האוניברסלי מורכב משני צירים הניצבים זה לזה, המחוברים ביניהם באופן קשיח - ה"צלב". המוטות מחוברים לצירים של הצלב, כל מוט בניצב לציר אליו הוא מחובר, והם חופשיים להסתובב סביב צירים אלו. נתון כי ציר הצלב המחובר ל-AB מקביל לציר z.

פתרון: שלבי הפתרון יהיו כדלהלן: מכיון שהמהירות הזוויתית של A ידועה אנו יכולים לחשב את המהירות של מרכז הצלב, הנקודה B. הכיוון של $\boldsymbol{\omega}_C$, ידוע והגודל ω_C יקבע את מהירות הנקודה D. את גודל המהירות ω_C נוכל לקבל על ידי השוואת מהירותה של D כנקודה על הגלגל, עם מהירותה כנקודה על המוט BD. השוואה זו תיתן לנו גם אינפורמציה על המהירות הזוויתית של BD. לבסוף, נשתמש בתכונות החיבור על ידי המפרק האוניברסלי, בכדי לקבל תנאי שעל רכיבי $\boldsymbol{\omega}$ לקיים, ואשר יאפשר לנו לחשב את $\boldsymbol{\omega}$ באופן חד משמעי.

1) חישוב $\mathbf{v}_B$

אנו דנים בגוף הקשיח המורכב מהגלגל A והמוט המחובר אליו. כראשית מערכת הגוף נבחר באופן טבעי את הנקודה A, ומתקיים

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega}_A \times \mathbf{R}_{AB} \ .$$

נתון כי $\boldsymbol{\omega}_A = 30\mathbf{k}$ rad/s, $\mathbf{R}_{AB} = -0.2\mathbf{i}$ m, והמהירות של A מתאפסת, ולכן,

$$\mathbf{v}_B = 30\mathbf{k} \times (-0.2\mathbf{i}\ ) = -6\mathbf{j} \text{ m/s} \ .$$

2) מהירותה של D כנקודה על הגלגל C

אנו דנים בגלגל C כגוף קשיח ובוחרים את ראשית מערכת הגוף במרכזו (שים לב כי אנו משתמשים ב-C גם כשם המרכז וגם כשם הגלגל לצורך קיצור בלבד). $\boldsymbol{\omega}_C = \omega_C \mathbf{i}$ rad/s, $\mathbf{R}_{CD} = -0.08\mathbf{j} + 0.06\mathbf{k}$ m והמהירות של הנקודה C מתאפסת, לכן

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_D &= \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega}_C \times \mathbf{R}_{CD} \\ &= \omega_C \mathbf{i} \times (-0.08\mathbf{j} + 0.06\mathbf{k}) \\ &= -0.06\omega_C \mathbf{j} - 0.08\omega_C \mathbf{k} \ . \end{aligned}$$

3) מהירותה של הנקודה D כנקודה על המוט BD

הגוף הקשיח בו אנו דנים כעת הוא המוט BD. אנו בוחרים את ראשית מערכת הגוף בנקודה B משום שאת מהירותה אנו יודעים. $\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k}$, $\mathbf{R}_{BD} = 0.2\mathbf{i} + 0.6\mathbf{j} - 0.3\mathbf{k}$ m ולכן

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_D &= \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_{BD} \\ &= \mathbf{v}_B + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 0.2 & 0.6 & -0.3 \end{vmatrix} \ . \end{aligned}$$

4) השוואת הביטויים עבור מהירות הקודה D.

מהשוואת הביטויים עבור מהירותה של הנקודה D אותם קיבלנו בשלבים הקודמים נקבל

$$\mathbf{v}_D - \mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_{BD} \ ,$$

$$-0.06\omega_C \mathbf{j} - 0.08\omega_C \mathbf{k} + 6\mathbf{j} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 0.2 & 0.6 & -0.3 \end{vmatrix} \ ,$$

כלומר,

$$\begin{aligned} 0 &= && -0.3\omega_y && -0.6\omega_z \\ 6 - 0.06\omega_C &= 0.3\omega_x && && +0.2\omega_z \\ -0.08\omega_C &= 0.6\omega_x && -0.2\omega_y && \ . \end{aligned}$$

קיבלנו שלוש משוואות עם ארבעה נעלמים. אנו זוכרים כי אפילו אם מהירותה של הנקודה D היתה ידועה, לא ניתן היה לחשב באופן חד-משמעי את המהירות הזוויתית $\boldsymbol{\omega}$, ולכן, היחס בין מספר המשוואות למספר

הנעלמים תואם את הציפיות שלנו. במקום לנסות לחלץ את ω_C מתוך המשוואות הללו, נעשה זאת על ידי השיטה שתוארה בסעיף הקודם.

5) חישוב ω_C ומהירותה של הנקודה D

מהמשוואה $\mathbf{v}_D - \mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_{BD}$, נובע כי הוקטור $\mathbf{v}_D - \mathbf{v}_B$ חייב להיות ניצב לוקטור $\mathbf{R}_{BD}$. לכן,

$$(\mathbf{v}_D - \mathbf{v}_B) \cdot \mathbf{R}_{BD} = 0 .$$

על ידי הצבת הערכים הידועים לנו נקבל

$$(6 - 0.06\omega_C)0.6 + (-0.3)(-0.08\omega_C) = 0 .$$

את המשוואה ניתן לפתור ולקבל את ω_C , ואז ניתן להציב את הערך המתקבל, לביטוי עבור $\mathbf{v}_D$ מהשלב השלישי, ולמשוואות עבור $\boldsymbol{\omega}$ מהשלב הרביעי. יתקבל

$$\omega_C = 300 \text{ rad/s} , \quad \mathbf{v}_D = -18\mathbf{j} - 24\mathbf{k} \text{ m/s} ,$$

ושתי המשוואות האחרונות עבור רכיבי $\boldsymbol{\omega}$ יתנו (אנו זוכרים כי רק שתיים מתוך המשוואות שמקבלים עבור $\boldsymbol{\omega}$ על סמך המהירויות של שתי נקודות בגוף הקשיח הן בלתי תלויות),

$$\omega_z = -1.5\omega_x - 60$$
$$\omega_y = 3\omega_x + 120 .$$

6) משוואת האילוץ וחישוב $\boldsymbol{\omega}$

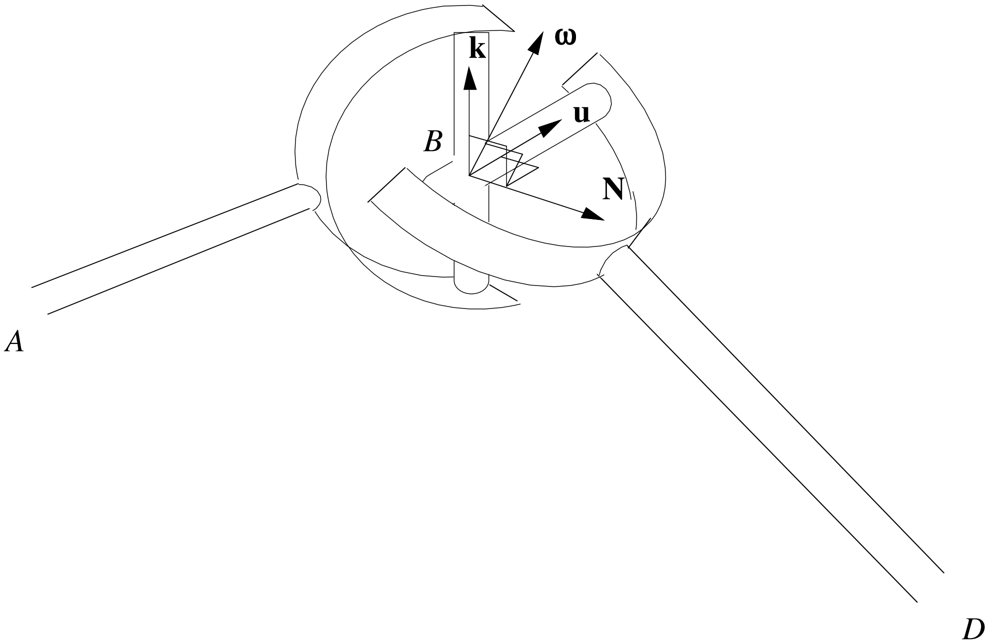
נתבונן במבנה המפרק האוניברסלי (תרשים 19). העובדה שציר הצלב מהחובר למוט AB מקביל לציר הסיבוב של המוט AB , גורמת לציר לנטרל את השפעת מהירותו הזוויתית של AB על המהירות הזוויתי של BD (כל עוד מהירותה של B אינה משתנה). לפיכך, למהירות הזוויתית, $\boldsymbol{\omega}$, יכול להיות רכיב כלשהו בכיוון $\mathbf{k}$, הוא כיוון ציר זה. בנוסף, הצלב מאפשר למוט סיבוב חופשי סביב צירו השני אשר מתואר בתרשים באמצעות הוקטור $\mathbf{u}$ (שאינו בהכרח וקטור יחידה). מבחינה גיאומטרית ניתן לאמר כי הוקטור $\boldsymbol{\omega}$ חייב להיות במישור הצלב והמכפלה הסקלרית שלו עם וקטור $\mathbf{N}$ הניצב למישור זה מתאפסת (ראה תרשים 19). משוואת האילוץ תהיה לכן

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{N} = 0 .$$

דיון כללי בנושא המהירויות הזוויתיות במפרק אוניברסלי מובא בדוגמה 4.4.4.

הוקטור $\mathbf{N}$ יכול להיות כל וקטור הניצב לצלב (כלומר, אורכו אינו חשוב) ולכן ניתן לקבל וקטור כזה על ידי מכפלה וקטורית של וקטורים בכיוון צירי הצלב. למציאת הוקטור $\mathbf{u}$, נשתמש בעובדה שהוא צריך להיות ניצב, הן לציר השני של הצלב - הוקטור $\mathbf{k}$, והן למוט BD אליו הוא מחובר. ניתן להסיק אם כן, כי

$$\mathbf{u} = \mathbf{k} \times \mathbf{R}_{BD} ,$$
$$\mathbf{N} = \mathbf{k} \times \mathbf{u} = \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{R}_{BD}) .$$



תרשים 19

בהצבת הוקטור $\mathbf{R}_{BD}$ נקבל

$$\mathbf{N} = -0.2\mathbf{i} - 0.6\mathbf{j} \,,$$

ומשוואת האילוץ תהיה

$$-0.2\omega_x - 0.6\omega_y = 0 \,.$$

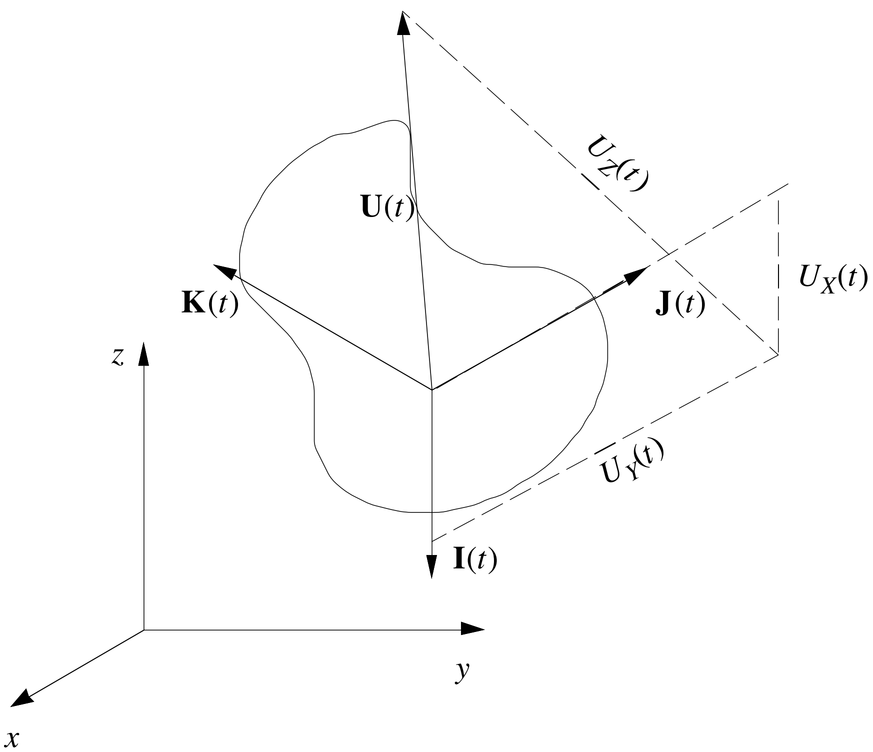
בצירוף משוואה זו לשתי המשוואות בסוף השלב הקודם, נקבל שלוש משוואות בשלושה נעלמים עבור רכיבי $\boldsymbol{\omega}$, ופתרונן יתן

$$\boldsymbol{\omega} = -36\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 6\mathbf{k} \text{ rad/s} \,.$$

4.2.8 חישוב הנגזרת של וקטור הנתון באמצעות רכיביו במערכת הגוף הקשיח

נניח כי וקטור כלשהו $\mathbf{U}$ נתון לנו באמצאות רכיביו $U_Z(t)$, $U_Y(t)$, $U_X(t)$ במערכת הגוף הקשיח (ראה תרשים 20). כלומר,

$$\mathbf{U}(t) = U_X(t)\mathbf{I}(t) + U_Y(t)\mathbf{J}(t) + U_Z(t)\mathbf{K}(t) \,.$$



תרשים 20

בהמשך, נשמיט בדרך כלל את ציון התלות בזמן בכדי לא להכביד על הסימון. נגזור לפי הזמן את הביטוי הזה, כאשר אנו לוקחים בחשבון את העובדה שוקטורי היחידה של מערכת הגוף אף הם תלויים בזמן. בשימוש הכלל לנגזרת מכפלה נקבל

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{U}} &= \dot{U}_X\mathbf{I} + U_X\dot{\mathbf{I}} + \dot{U}_Y\mathbf{J} + U_Y\dot{\mathbf{J}} + \dot{U}_Z\mathbf{K} + U_Z\dot{\mathbf{K}} \\ &= \dot{U}_X\mathbf{I} + \dot{U}_Y\mathbf{J} + \dot{U}_Z\mathbf{K} + U_X\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{I} + U_Y\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{J} + U_Z\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{K} \\ &= \dot{U}_X\mathbf{I} + \dot{U}_Y\mathbf{J} + \dot{U}_Z\mathbf{K} + \boldsymbol{\omega}\times(U_X\mathbf{I} + U_Y\mathbf{J} + U_Z\mathbf{K}),\end{aligned}$$

כאשר בשורה השניה השתמשנו בכללים לגבי נגזרות וקטורי הבסיס במערכת הגוף אשר קיבלנו בסעיף 4.2.1, ובשורה השלישית הוצאנו את הכופל המשותף $\boldsymbol{\omega}$ מחוץ לסוגריים. ראשית, אנו שמים לב כי הביטוי בתוך הסוגריים העגולים הוא פשוט הוקטור $\mathbf{U}$. שנית, שלושת האיברים הראשונים באגף ימין מבטאים וקטור, שמתקבל מגזירת רכיבי הוקטור $\mathbf{U}$ במערכת הגוף, מבלי לקחת בחשבון את העובדה כי וקטורי הבסיס משתנים בזמן אף הם. אדם אשר נמצא "על גבי הגוף הקשיח" ואשר "מכיר" את הוקטור $\mathbf{U}$ רק על ידי מדידת רכיביו במערכת הגוף, יטעה לחשוב ששלושה איברים אלו הם אכן הנגזרת של הוקטור $\mathbf{U}$. הדבר מצדיק במידת מה את הסימון

$$\dot{\mathbf{U}}_{XYZ} = \dot{U}_X\mathbf{I} + \dot{U}_Y\mathbf{J} + \dot{U}_Z\mathbf{K}$$

שאנו ניתן לוקטור המתקבל משלושה רכיבים אלו (X,Y,Z כמובן באותיות גדולות לציון מערכת הגוף). בהמשך אף נתייחס בקיצור לוקטור זה, כ"**נגזרת של $\mathbf{U}$ יחסית למערכת** XYZ ". ניתן לכן לסכם את הסעיף בכלל

$$\boxed{\dot{\mathbf{U}} = \dot{\mathbf{U}}_{XYZ} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{U}} \ .$$

כפי שנראה בהמשך, החשיבות של הכלל שקיבלנו נובעת מהעובדה, שפעמים רבות חישוב הנגזרת של וקטור יחסית למערכת הגוף הינו פשוט. בעזרת הכלל אנו יכולים להשתמש בנגזרת יחסית למערכת הגוף לצורך חישוב הנגזרת עצמה.

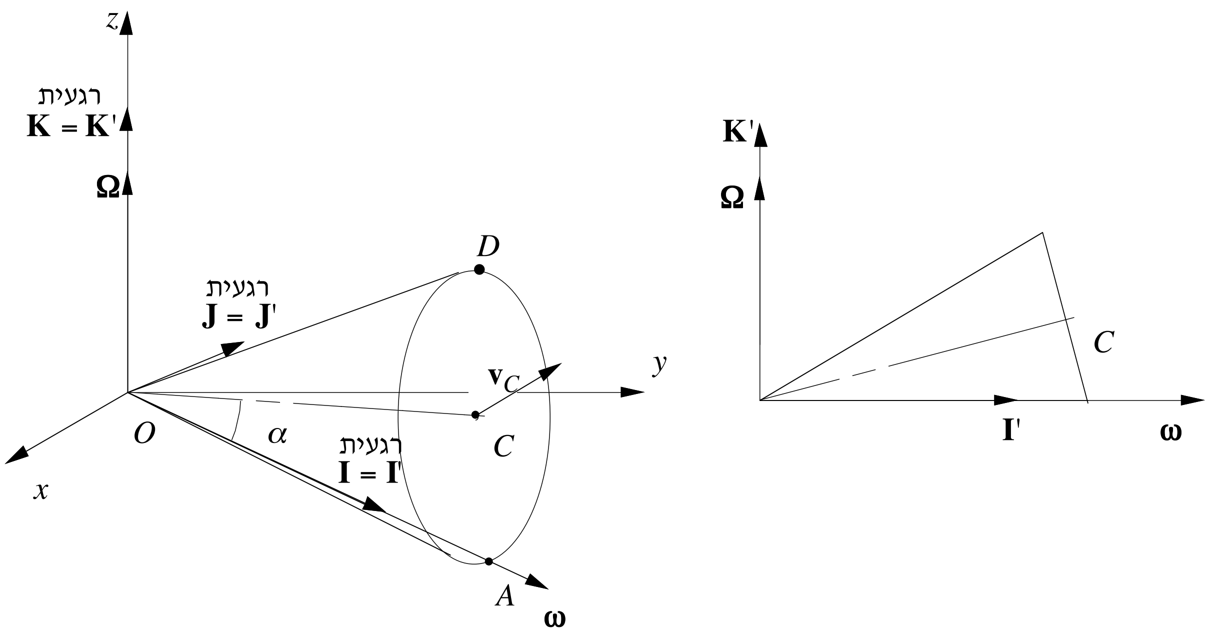
4.2.9 גזירת וקטור שרכיביו נתונים יחסית למערכת צירים סובבת

במספר פעמים בהמשך, אנו נתאר את תלות הרכיבים של וקטור בזמן, כאשר הרכיבים מצויינים יחסית למערכת צירים מסתובבת, אשר אינה צמודה לגוף קשיח ממשי מסוים. הדבר יהיה נוח משום שתלות זו תהיה פשוטה ונוחה לתאור מתימטי. כמובן שהכללים שקיבלנו עד כה אינם משתנים, בין אם מערכת הצירים הסובבת בה אנו משתמשים צמודה לגוף קשיח "ממשי" (או בעל חומר), לבין המקרה של מערכת צירים אשר מתארת גוף דימיוני ובה אנו משתמשים לצורך נוחיות. לכן, אם נסמן את המהירות הזוויתית של המערכת הנדונה על ידי $\boldsymbol{\Omega}$, את ציריה על ידי X', Y', Z' , ואת וקטורי הבסיס שלה על ידי $\mathbf{I}', \mathbf{J}', \mathbf{K}'$, נוכל לרשום מיד

$$\boxed{\dot{\mathbf{U}} = \dot{\mathbf{U}}_{X'Y'Z'} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U}} \ .$$

4.2.10 דוגמה

נתבונן במערכת המתוארת בדוגמה 4.2.4 (ראה תרשים 21). בנוסף למערכת הצמודה לגוף הקשיח, אנו יכולים לדון במערכת צירים שראשיתה בנקודה O , אשר ציריה מתלכדים במצב המתואר עם צירי מערכת הגוף, ואשר סובבת סביב ציר z (של מערכת המרחב) במהירות זוויתית $\boldsymbol{\Omega}$, כך שוקטור היחידה $\mathbf{I}'$ תמיד נמצא לאורך הישר שלאורכו החרוט משיק למישור האופקי (ברור כי הנקודה C נמצאת תמיד במישור (X', Z'). בעוד שוקטור היחידה $\mathbf{K}$ נמצא רגעית בכיוון z , הוא לא יהיה בכיוון זה כל הזמן כי הוא סובב סביב קו ההשקה במהירות הזוויתית $\boldsymbol{\omega}$. לעומת זאת, הוקטור $\mathbf{K}'$ יהיה בכיוון z בכל זמן וזמן.



תרשים 21

בכל רגע ורגע נקודת חומר אחרת, ולאו דוקא A , נמצאת במגע עם המישור האופקי. מכיון שמערכת הגוף צמודה לנקודה A , הציר $\mathbf{I}$ לא יהיה במישור x, y , ולא יהיה בכיוון הוקטור $\boldsymbol{\omega}$ בדרך כלל. לעומת זאת, החתך במישור $\mathbf{I}', \mathbf{K}'$ תמיד יראה כמו בחלק הימני של התרשים: הוקטור $\mathbf{I}'$ תמיד ימצא במישור האופקי x, y ובכיוון הוקטור $\boldsymbol{\omega}$. רכיבי הוקטור $\mathbf{R}_{OC}$ יהיו קבועים במערכת זו, כלומר, $\dot{\mathbf{U}}_{X'Y'Z} = \mathbf{0}$ ולכן $\dot{\mathbf{R}}_{OC} = \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{R}_{OC}$.

נניח כי ברצוננו לחשב את קצב השינוי $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ של הוקטור $\boldsymbol{\omega}$. כפי שמצאנו בדוגמה 4.2.4, הוקטור $\boldsymbol{\omega}$ נתון על ידי $\boldsymbol{\omega} = -2\pi n\cot\alpha\mathbf{I}$ במצב הנתון. אולם, הוקטור $\boldsymbol{\omega}$ לא נישאר בכיוון $\mathbf{I}$, שעוקב אחר הנקודה A, אלא, הוא תמיד לאורך ישר ההשקה. לפיכך, הוקטור $\boldsymbol{\omega}$ סובב למעשה על המישור האופקי באותה מהירות זוויתית בה סובב ציר החרוט OC . דרך אחת לחשב את $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ היא לכתוב את התלות בזמן של הרכיבים של $\boldsymbol{\omega}$ על צירי המרחב ולגזור את הביטוי המתקבל. דרך מסובכת יותר תהיה לכתוב את התלות בזמן של רכיבי $\boldsymbol{\omega}$ יחסית למערכת הגוף, אחר כך לגזור אותם לקבלת $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{XYZ}$ ולהציב זאת בנוסחה שקיבלנו בסעיף 4.2.8 כשהיא מיושמת עבור הוקטור $\boldsymbol{\omega}$.

הדרך הפשוטה ביותר, היא לשים לב כי הביטוי, $\boldsymbol{\omega} = -2\pi n\cot\alpha\mathbf{I}'$, הינו נכון בכל רגע ורגע. כתוצאה מכך,

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{X'Y'Z'} = \mathbf{0} ,$$

משום שרכיבי $\boldsymbol{\omega}$ יחסית לבסיס $\mathbf{I}', \mathbf{J}', \mathbf{K}'$ הינם קבועים. לכן, אם ניישם את המשוואה

$$\dot{\mathbf{U}} = \dot{\mathbf{U}}_{X'Y'Z'} + \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{U} ,$$

עבור הוקטור $\boldsymbol{\omega}$ והמערכת $\mathbf{I}', \mathbf{J}', \mathbf{K}'$ הסובבת במהירות $\boldsymbol{\Omega}$ בכיוון הציר $\mathbf{K}'$, נקבל

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\omega}} &= \dot{\boldsymbol{\omega}}_{X'Y'Z'} + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{\omega} \\ &= \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{\omega} .\end{aligned}$$

מכיון שגודלה של $\boldsymbol{\Omega}$ כפי שמצאנו בדוגמה 4.2.4 הוא $\dot{\theta} = 2\pi n \text{ rad/s}$, הרי $\boldsymbol{\Omega} = 2\pi n\mathbf{K}' \text{ rad/s}$, ומכאן

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = 2\pi n\mathbf{K}'\times(-2\pi n\cot\alpha\mathbf{I}')$$
$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = -4\pi^2 n^2\cot\alpha\mathbf{J}' .$$

כלומר, הנגזרת של המהירות הזוויתית נמצאת תמיד במישור הסיבוב של הוקטור $\boldsymbol{\omega}$, וכפי שניתן לצפות עבור וקטור בעל גודל קבוע, הנגזרת ניצבת ל-$\boldsymbol{\omega}$.

4.2.11 מהירות חלקיק שנע יחסית לגוף קשיח

במצב המתואר בסעיף 4.2.1, הרכיבים, Z_0 , Y_0 , X_0 יחסית למערכת הגוף, של הוקטור $\mathbf{R}$ שתאר את מקומה של נקודת חומר בגוף הקשיח, היו קבועים. לעומת זאת, אם

$$\mathbf{R} = X\mathbf{I} + Y\mathbf{J} + Z\mathbf{K} ,$$

מצביע אל חלקיק שנע יחסית לגוף הקשיח, רכיביו ישתנו עם הזמן. אם נשתמש בכלל שקיבלנו בסעיף הקודם נקבל

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{R}}_{XYZ} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} ,$$

והמהירות, $\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_A + \dot{\mathbf{R}}$, של החלקיק יחסית למערכת המרחב תחושב על ידי

$$\boxed{\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_A + \dot{\mathbf{R}}_{XYZ} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} .}$$

בהתאם למוסכמה בסעיף 4.2.8, אנו נתייחס לוקטור $\dot{\mathbf{R}}_{XYZ}$ כאל **המהירות של החלקיק יחסית לגוף הקשיח**.

4.2.12 השוואת הנגזרת של המהירות הזוויתית עם זו המחושבת במערכת הגוף

יישום פשוט של הכלל שקיבלנו בסעיף 4.2.9, עבור וקטור המהירות הזוויתית, יתן

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{XYZ} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} .$$

מכיון שהמכפלה הוקטורית של $\boldsymbol{\omega}$ בעצמו מתאפסת קיבלנו את הכלל:

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{XYZ}}$$

שמצביע על כך שהנגזרת של $\boldsymbol{\omega}$ יחסית למערכת הגוף הקשיח שאת מהירותו הזוויתית היא מתארת, שווה לנגזרת עצמה.

אם עבור דוגמה 4.2.10 למשל, אנו מעוניינים לחשב את קצב שינוי $\boldsymbol{\omega}$ יחסית למערכת הגוף , $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{XYZ}$, שחישובו הישיר הינו מסובך למדי כפי שהוסבר, נוכל להשתמש בכלל שקיבלנו בסעיף זה, ולהסיק מיד כי גם

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{XYZ} = -4\pi^2 n^2 \cot\alpha \mathbf{J}' = -4\pi^2 n^2 \cot\alpha \mathbf{J} .$$

4.3.1 תאוצות בתנועת גוף קשיח

בהמשך לסעיף 4.2.11, נחשב את התאוצה של חלקיק שמקומו יחסית לראשית מערכת הגוף נתון על ידי

$$\mathbf{R} = X\mathbf{I} + Y\mathbf{J} + Z\mathbf{K} \,.$$

תנועתו של החלקיק יחסית לגוף הקשיח, מתבטאת בכך שהרכיבים X, Y, Z יכולים להיות תלויים בזמן. במקרה שרכיבים אלו קבועים, המשוואות שנקבל יתארו חלקיק שנמצא במנוחה יחסית לגוף הקשיח, או נקודת חומר בגוף.

לצורך נוחיות, נסמן על ידי $\mathbf{V}$ את הוקטור $\dot{\mathbf{R}}$ אשר מציין את מהירות החלקיק יחסית למהירות ראשית מערכת הגוף. אם ניישם את הכלל שקיבלנו בסעיף 4.2.8 לוקטור $\mathbf{V}$, נקבל

$$\dot{\mathbf{V}} = \ddot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{V}}_{XYZ} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} \,.$$

אנו זוכרים מסעיף 4.2.11, כי, $\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}}_{XYZ} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$, ולכן

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{V}}_{XYZ} &= \frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{R}}_{XYZ} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})_{XYZ} \\ &= \ddot{\mathbf{R}}_{XYZ} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{XYZ} \times \mathbf{R} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{R}}_{XYZ} \,, \end{aligned}$$

כאשר בשורה השניה השתמשנו בכלל לנגזרת מכפלה (שתופס כמובן עבור הנגזרת היחסית משום שהיא מתבצעת על ידי גזירה רגילה בהנחה שוקטורי הבסיס קבועים). האיבר $\ddot{\mathbf{R}}_{XYZ}$ מסמן כמובן את הנגזרת היחסית השניה של הוקטור $\mathbf{R}$, כלומר, הוקטור המתקבל מגזירה שניה של רכיבי הוקטור במערכת הגוף ללא גזירת וקטורי הבסיס. בעתיד נתייחס לוקטור $\ddot{\mathbf{R}}_{XYZ}$ כאל **תאוצת החלקיק יחסית לגוף הקשיח**. בנוסף, מסעיף 4.2.12 למדנו כי $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{XYZ} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$, לכן,

$$\dot{\mathbf{V}}_{XYZ} = \ddot{\mathbf{R}}_{XYZ} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{R} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{R}}_{XYZ} \,.$$

נציב את הערכים שקיבלנו לתוך המשוואה עבור $\ddot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{V}}$ ונקבל

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{R}} &= \ddot{\mathbf{R}}_{XYZ} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{R} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{R}}_{XYZ} + \boldsymbol{\omega} \times (\dot{\mathbf{R}}_{XYZ} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \\ &= \ddot{\mathbf{R}}_{XYZ} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{R} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{R}}_{XYZ} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \,. \end{aligned}$$

על ידי גזירה פעמיים של הקשר $\mathbf{r} = \mathbf{r}_A + \mathbf{R}$, נקבל $\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_A + \ddot{\mathbf{R}}$, ומכאן, תאוצת החלקיק היא

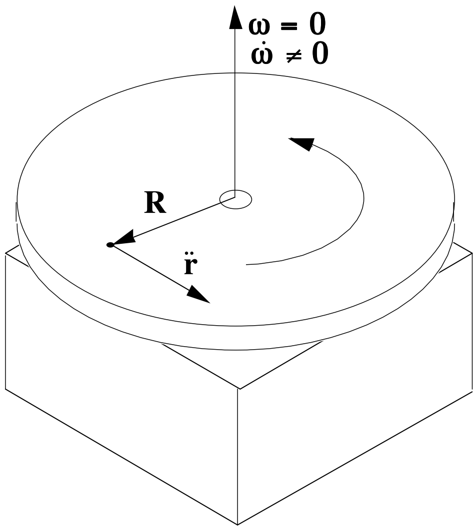
$$\boxed{\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_A + \ddot{\mathbf{R}}_{XYZ} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{R} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{R}}_{XYZ} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \,.}$$

נדון במשמעות הפיזיקלית של האיברים השונים במשוואה זו. האיבר הראשון, $\ddot{\mathbf{r}}_A$, מביע פשוט את תאוצת הראשית A של מערכת הגוף. אם יש בגוף נקודה הנמצאת במנוחה, כלומר, הגוף סובב סביב נקודה קבועה, טבעי יהיה לבחור בנקודה זו כראשית מערכת הגוף, ובמקרה זה $\ddot{\mathbf{r}}_A = \dot{\mathbf{r}}_A = \mathbf{0}$. במקרה בו הגוף

הקשיח אינו מסתובב, התאוצה של נקודת חומר כלשהי בגוף, תהיה שווה בדיוק לתאוצת הראשית.

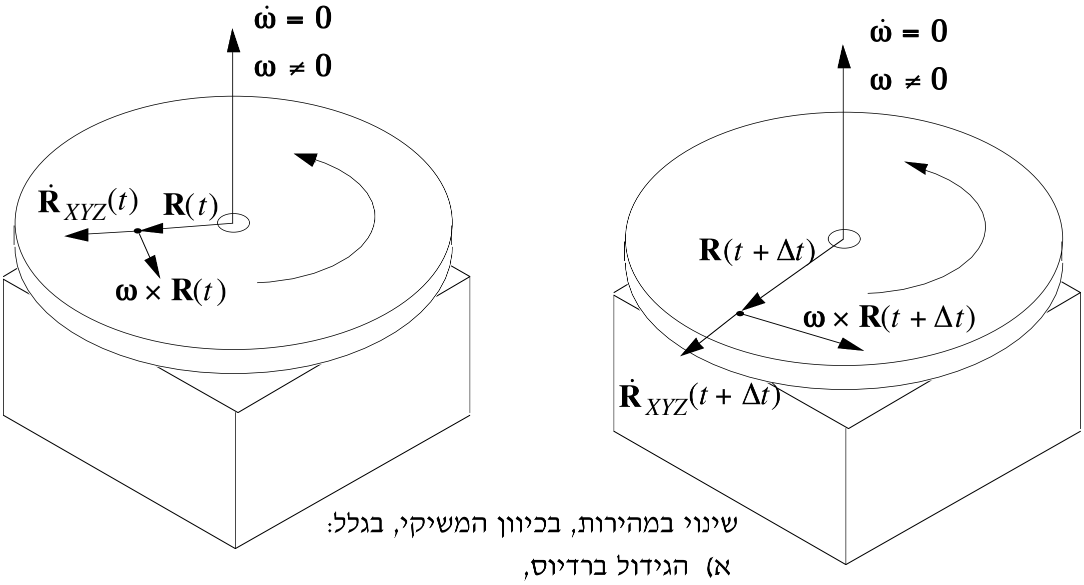
האיבר השני, $\ddot{\mathbf{R}}_{XYZ}$, מביע כפי שנאמר, את תאוצת החלקיק יחסית לגוף הקשיח, כלומר, את התאוצה שימדוד אדם הנמצא על הגוף הקשיח ומתעלם מתנועתו של הגוף. במקרה בו החלקיק נע במהירות קבועה (או נמצא במנוחה) יחסית לגוף הקשיח, או במקרה בו אנו מחשבים את התאוצה של נקודת חומר בגוף, איבר זה יתאפס. במקרה בו הגוף הקשיח נמצא בתנועה קצובה ללא סיבוב לאורך ישר (או במנוחה), תאוצת חלקיק כלשהו תהיה שווה לתאוצתו יחסית לגוף הקשיח.

הוקטור $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ המופיע באיבר השלישי יקרא באופן טבעי **התאוצה הזוויתית**. איבר זה דומה באופיו לאיבר $r\ddot{\theta}$ המופיע בביטוי עבור התאוצה של חלקיק בקואורדינטות פולריות. תאוצת נקודת חומר על גלגל הסובב סביב ציר קבוע (ראה תרשים 22), אשר נמצא רגעית במנוחה, כלומר $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$, ואשר מקבל תאוצה זוויתית, תכלול את האיבר $\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{R}$ בלבד. בניגוד לבעיות דו-מימדיות, בהן הוקטור $\boldsymbol{\omega}$ הוא בכיוון קבוע, בבעיות תלת מימדיות הנגזרת $\dot{\boldsymbol{\omega}}$, יכולה להגרם כתוצאה משינוי בכיוון הוקטור $\boldsymbol{\omega}$, כמו בדוגמה 4.2.10.



תרשים 22

האיבר הרביעי, $2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{R}}_{XYZ}$, במשוואה עבור התאוצה נקרא **תאוצת קוריוליס** על שמו של המתמטיקאי ג. קוריוליס (1792-1843) שתאר אותה ב-1835. בכדי שתאוצת קוריוליס תתקיים דרוש שהחלקיק ינוע יחסית לגוף קשיח סובב (לא בכיוון הוקטור $\boldsymbol{\omega}$). בהנחה שמהירות הסיבוב קבועה (ראה תרשים 23), תנועה בניצב ל-$\boldsymbol{\omega}$ תגרום לשינוי המרחק מציר הסיבוב ועל ידי כך לתאוצה בכיוון המשיקי. בנוסף, כיוון המהירות היחסית, הוא הכיוון הרדיאלי בתרשים, משתנה כתוצאה מסיבוב הגוף והדבר תורם לתאוצה גם כן. ביחד, הביטוי $\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{R}}_{XYZ}$ מופיע פעמיים. תאוצת קוריוליס תהיה האיבר היחידי שיתרום לתאוצת החלקיק המתואר ברגע בו הוא חולף דרך ציר הסיבוב.



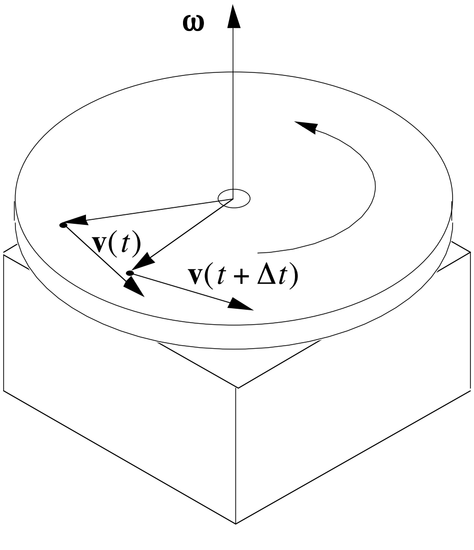
שינוי במהירות, בכיוון המשיקי, בגלל:

א) הגידול ברדיוס,

ב) שינוי הכיוון הרדיאלי כתוצאה מהסיבוב.

תרשים 23

האיבר החמישי , $\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R})$, נקרא **התאוצה הצנטריפטלית**. התאוצה הצנטריפטלית נובעת מהעובדה שהמהירות המשיקית, $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}$, של נקודת חומר בגוף הקשיח, משנה את כיוונה ביחד עם סיבוב הגוף (ראה תרשים 24). ברור שעבור $\boldsymbol{\omega}$ קבועה ונקודת חומר קבועה גודל המהירות נשאר קבוע ולכן התאוצה חייבת להיות ניצבת למהירות, כלומר, בכיוון הרדיאלי במגמה לכיוון ציר הסיבוב. הדבר נראה בביטוי $\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R})$, כי מכפלה זו חייבת להיות ניצבת הן ל-$\boldsymbol{\omega}$ והן למהירות המשיקית $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}$.



תרשים 24

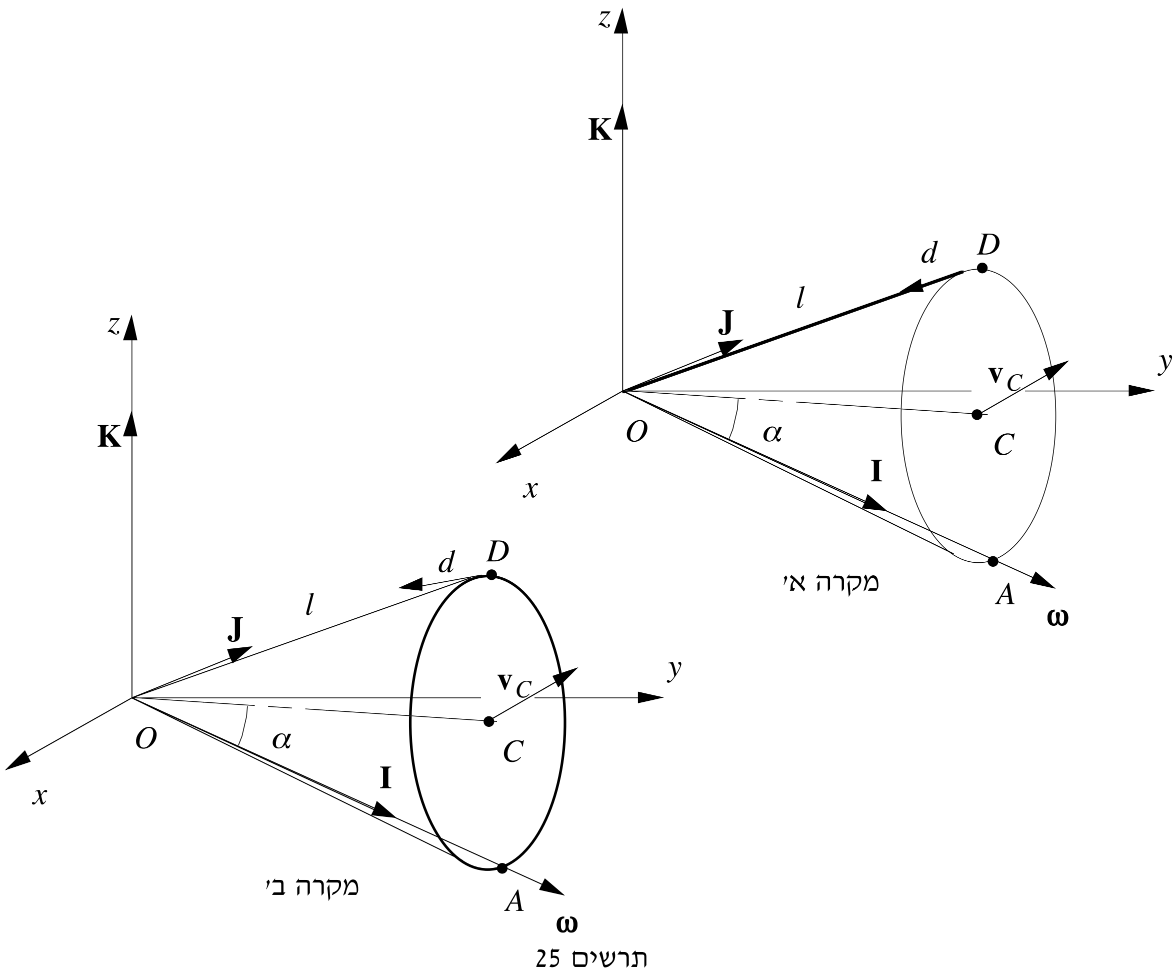
בבעיות דו-מימדיות, המהירויות כולן נמצאות במישור הנדון. נובע מכך שהוקטור $\boldsymbol{\omega}$ ניצב למישור (אחרת היינו מקבלים רכיבי $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}$ בניצב למישור). תוצאת המכפלה הוקטורית של $\mathbf{R}$ ב-$\boldsymbol{\omega}$ תהיה מסובבת ב-90° יחסית לוקטור $\mathbf{R}$, ותוצאת הכפלה נוספת תהיה מסובבת ב-180° יחסית ל-$\mathbf{R}$. מכיון שאנו כופלים וקטורית וקטורים הניצבים זה לזה, גודל התוצאה יהיה מכפלת הגדלים. נובע מכך שבבעיות

$$\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}) = -\omega^2\mathbf{R} \, ,$$

באנלוגיה לאיבר $-\dot{\theta}^2 r\hat{\mathbf{r}}$ שקיבלנו בביטוי לתאוצה בקואורדינטות פולריות. כמובן שניתן להשתמש בביטוי פשוט זה בכל פעם שהמהירות הזוויתית ניצבת ל-$\mathbf{R}$.

4.3.2 דוגמה

אנו חוזרים למערכת שתוארה בדוגמאות 4.2.4 ו-4.2.10, של החרוט שמתגלגל על מישור אופקי, אשר צירו סובב סביב ציר z. אנו מעוניינים לחשב את התאוצה של הנקודה A על החרוט וכן את התאוצה של חלקיק שנע יחסית לחרוט בשני מקרים:



תרשים 25

מקרה א': החלקיק נע לאורך מסילה ישרה שנמצאת על החרוט בין הנקודות O ו-D . במצב המתואר הוא בקצה המסילה, בנקודה D , והוא נע במגמה המתוארת במהירות שגודלה d יחסית למסילה ובתאוצה שגודלה e יחסית למסילה באותה מגמה (ראה תרשים 25).

מקרה ב': החלקיק נע לאורך מסילה מעגלית הנמצאת על היקף הבסיס של החרוט, במהירות שגודלה, d קבוע יחסית למסילה. במצב המתואר החלקיק נמצא בנקודה D .

פתרון: כל אשר עלינו לעשות הוא להשתמש במשוואות שקיבלנו עבור תאוצת נקודה על הגוף הקשיח, או נקודה שנעה יחסית לגוף הקשיח. עבור הנקודה A שהיא נקודה על הגוף הקשיח, התאוצה והמהירות יחסית לגוף הקשיח מתאפסות ועבור שני המקרים האחרים נציב את התאוצה היחסית כפי שיתואר בהמשך. בכל אופן, במשוואה הכללית

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_A + \ddot{\mathbf{R}}_{XYZ} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{R} + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{R}}_{XYZ} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})$$

הוקטורים אותם אנו יודעים מיד הם: $\ddot{\mathbf{r}}_A$ מסמן במשוואה הכללית את תאוצת הראשית ולכן הוא מתאפס, את המהירות הזוויתית מצאנו בדוגמה 4.2.4 והיא $\boldsymbol{\omega} = -2\pi n \cot\alpha \mathbf{I}$, את התאוצה הזוויתית מצאנו בתרגיל 4.2.10 והיא $\dot{\boldsymbol{\omega}} = -4\pi^2 n^2 \cot\alpha \mathbf{J}$.

חישוב תאוצת הנקודה A.

עבור הנקודה A עלינו להציב במשוואה הכללית גם

$$\mathbf{R} = l\mathbf{I}\,,\ \ \dot{\mathbf{R}}_{XYZ} = \mathbf{0}\,,\ \ \ddot{\mathbf{R}}_{XYZ} = \mathbf{0}$$

כך שמתקבל

$$\ddot{\mathbf{r}} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{R} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})\ .$$

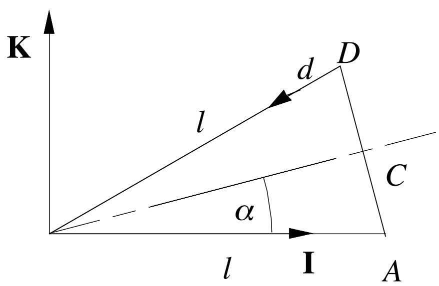
מכיון ש-$\mathbf{R}$ ו-$\boldsymbol{\omega}$ מקבילים המכפלה הוקטורית ביניהם מתאפסת ובסופו של דבר

$$\ddot{\mathbf{r}} = (-4\pi^2 n^2 \cot\alpha \mathbf{J}) \times l\mathbf{I}$$
$$\ddot{\mathbf{r}} = 4\pi^2 n^2 l \cot\alpha \mathbf{K}\ .$$

אנו שמים לב לכך שהתאוצה של הנקודה A על החרוט, שונה מהתאוצה של הנקודה על המישור איתה היא באה במגע.

תאוצת החלקיק במקרה א': מתרשים 26 אנו יכולים להסיק מיד כי עבור החלקיק

$$\mathbf{R} = l\cos 2\alpha \mathbf{I} + l \sin 2\alpha \mathbf{K}$$
$$\dot{\mathbf{R}}_{XYZ} = -d\cos 2\alpha \mathbf{I} - d\sin 2\alpha \mathbf{K}$$
$$\ddot{\mathbf{R}}_{XYZ} = -e\cos 2\alpha \mathbf{I} - e\sin 2\alpha \mathbf{K}\ .$$



תרשים 26

הצבה במשוואה הכללית תיתן

$$\ddot{\mathbf{r}} = -e\cos 2\alpha\mathbf{I} - e\sin 2\alpha\mathbf{K} + (-4\pi^2 n^2 \cot\alpha\mathbf{J}) \times (l\cos 2\alpha\mathbf{I} + l\sin 2\alpha\mathbf{K}) +$$
$$+2(-2\pi n\cot\alpha\mathbf{I}) \times (-d\cos 2\alpha\mathbf{I} - d\sin 2\alpha\mathbf{K}) +$$
$$+(-2\pi n\cot\alpha\mathbf{I}) \times [(-2\pi n\cot\alpha\mathbf{I}) \times (l\cos 2\alpha\mathbf{I} + l\sin 2\alpha\mathbf{K})]$$

ועל ידי חישוב הפעולות השונות נקבל

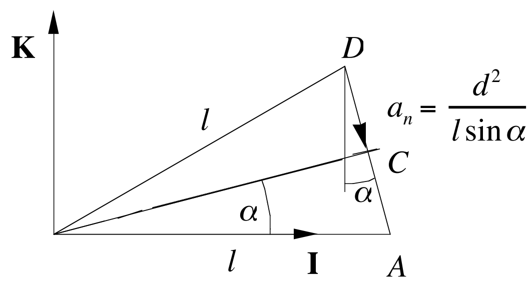
$$.\ddot{\mathbf{r}} = -(e\cos 2\alpha + 8\pi^2 n^2 l\cos^2\alpha)\mathbf{I} - 8\pi nd\cos^2\alpha\mathbf{J} + [4\pi^2 n^2 l\cot\alpha - e\sin 2\alpha]\mathbf{K}$$

תאוצת החלקיק במקרה ב': במקרה זה, תנועתו של החלקיק יחסית לחרוט היא תנועה על מסלול מעגלי במישור הבסיס, במהירות בעל גודל קבוע. לכן, אנו יכולים להסיק כי יחסית לחרוט יש לחלקיק תאוצה נורמלית בכיוון מרכז הבסיס אשר גודלה הוא

$$.\ a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{d^2}{l\sin\alpha}$$

וקטור התאוצה היחסית יהיה אם כן (ראה תרשים 27)

$$\ddot{\mathbf{R}}_{XYZ} = \frac{d^2}{l\sin\alpha}(\sin\alpha\mathbf{I} - \cos\alpha\mathbf{K}) = \frac{d^2}{l}\mathbf{I} - \frac{d^2\cot\alpha}{l}\mathbf{K}$$



תרשים 27

ווקטור המהירות היחסית הוא כמובן

$$.\ \dot{\mathbf{R}}_{XYZ} = -d\mathbf{J}$$

בהצבת הגדלים הידועים נקבל

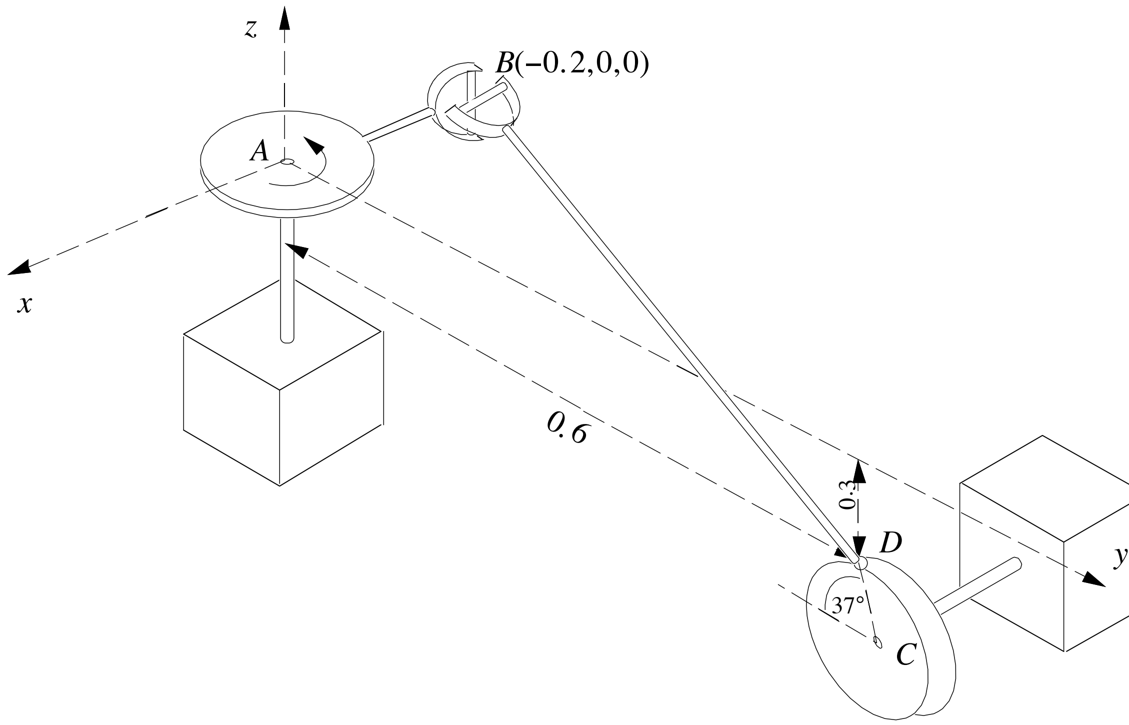
$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{d^2}{l}\mathbf{I} - \frac{d^2\cot\alpha}{l}\mathbf{K} + (-4\pi^2 n^2\cot\alpha\mathbf{J}) \times (l\cos 2\alpha\mathbf{I} + l\sin 2\alpha\mathbf{K}) + 2(-2\pi n\cot\alpha\mathbf{I}) \times (-d\mathbf{J}) +$$
$$+(-2\pi n\cot\alpha\mathbf{I}) \times [(-2\pi n\cot\alpha\mathbf{I}) \times (l\cos 2\alpha\mathbf{I} + l\sin 2\alpha\mathbf{K})]$$

וחישוב יתן

$$.\ddot{\mathbf{r}} = \left(\frac{d^2}{l} - 8\pi^2 n^2 l\cos^2\alpha\right)\mathbf{I} + \cot\alpha\frac{(d - 2\pi nl)^2}{l}\mathbf{K}$$

דוגמה 4.3.3

בדוגמה זו נדון שוב במערכת בה עסקנו בדוגמה 4.2.7 אשר מתוארת שוב בתרשים 28. לנתונים הקודמים אנו מוסיפים את הנתון כי לגלגל A ישנה תאוצה זוויתית סביב צירו הקבוע בגודל $\dot{\omega}_A = 25\ \text{rad/s}^2$. דרוש לחשב את התאוצה של הנקודה D ואת התאוצה הזוויתית $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ של המוט BD.



תרשים 28

פתרון: אין הבדל עקרוני, בין פתרון בעיה זו הכוללת תאוצות, לפתרון החלק הראשון שכלל מהירויות בלבד. גם כאן נחשב ראשית את התאוצה של הנקודה B, ולאחר מכן נרשום את התאוצה של הנקודה D הן כחלק מהמוט BD והן כחלק מגלגל C. כמו בבעית המהירויות, נקבל שלוש משוואות עם ארבעה נעלמים סקלריים, שהם רכיבי התאוצה הזוויתית של המוט BD, והתאוצה הזוויתית שיש לגלגל C. שוב נראה דרך פשוטה לחלוץ התאוצה הזוויתית של הגלגל C, המבוססת על השוואת רכיבי התאוצה בכיוון המוט. גזירה לפי הזמן של משוואת האילוץ שקיבלנו, תיתן לנו משוואת אילוץ עבור וקטור התאוצה הזוויתית, אותה נוכל לחשב אז באופן חד משמעי. לאורך כל מהלך הפתרון אנו נשתמש בתוצאות שהושגו בדוגמה 4.2.7.

1) חישוב $\mathbf{a}_B$

הנקודה B שייכת לגוף הקשיח המורכב מהגלגל A והמוט המחובר אליו, ולכן מהירותה ותאוצתה יחסית לגוף זה מתאפסות. מתקבל:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_B &= \mathbf{a}_A + \left(\ddot{\mathbf{R}}_{AB}\right)_{XYZ} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_A \times \mathbf{R}_{AB} + 2\boldsymbol{\omega}_A \times \left(\dot{\mathbf{R}}_{AB}\right)_{XYZ} + \boldsymbol{\omega}_A \times (\boldsymbol{\omega}_A \times \mathbf{R}_{AB}) \\
&= \mathbf{0} + \mathbf{0} + 25\mathbf{k} \times (-0.2\mathbf{i}) + \mathbf{0} + 30\mathbf{k} \times [30\mathbf{k} \times (-0.2\mathbf{i})] \\
&= 180\mathbf{i} - 5\mathbf{j} \quad .
\end{aligned}$$

2) חישוב תאוצתה של הנקודה D כנקודה על הגלגל C

אנו משתמשים בתוצאות הדוגמה 4.2.7, עבור $\boldsymbol{\omega}_C$ בביטוי הכללי עבור התאוצה, ומקבלים

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_D &= \mathbf{a}_C + \left(\ddot{\mathbf{R}}_{CD}\right)_{XYZ} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_C \times \mathbf{R}_{CD} + 2\boldsymbol{\omega}_C \times \left(\dot{\mathbf{R}}_{CD}\right)_{XYZ} + \boldsymbol{\omega}_C \times (\boldsymbol{\omega}_C \times \mathbf{R}_{CD})\\ &= \mathbf{0} + \mathbf{0} + \dot{\omega}_C \mathbf{i} \times (-0.08\mathbf{j} + 0.06\mathbf{k}) + \mathbf{0} + 300\mathbf{i} \times [300\mathbf{i} \times (-0.08\mathbf{j} + 0.06\mathbf{k})]\\ &= (7200 - 0.06\dot{\omega}_C)\mathbf{j} - (5400 + 0.08\dot{\omega}_C)\mathbf{k} \quad .\end{aligned}$$

3) חישוב תאוצתה של הנקודה D כנקודה על המוט BD

גם כאן, כמו בשני השלבים הקודמים, התאוצה היחסית והמהירות היחסית מתאפסות והמשוואה הכללית מצטמצמת:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_D &= \mathbf{a}_B + \left(\ddot{\mathbf{R}}_{BD}\right)_{XYZ} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{R}_{BD} + 2\boldsymbol{\omega} \times \left(\dot{\mathbf{R}}_{BD}\right)_{XYZ} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_{BD})\\ &= \mathbf{a}_B + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{R}_{BD} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_{BD}) \quad .\end{aligned}$$

הנעלמים במשוואה זו הם כמובן הוקטורים $\mathbf{a}_D$ ו-$\dot{\boldsymbol{\omega}}$. בהצבת הגדלים הידועים נקבל

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_D &= 180\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times (0.2\mathbf{i} + 0.6\mathbf{j} - 0.3\mathbf{k}) +\\ &\qquad + (-36\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 6\mathbf{k}) \times [(-36\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 6\mathbf{k}) \times (0.2\mathbf{i} + 0.6\mathbf{j} - 0.3\mathbf{k})]\\ &= (-180 \qquad\qquad - 0.3\dot{\omega}_y - 0.6\dot{\omega}_z)\mathbf{i}\\ &\quad\; (-869 + 0.3\dot{\omega}_x \qquad\qquad + 0.2\dot{\omega}_z)\mathbf{j} \quad .\\ &\quad\; (\;342 + 0.6\dot{\omega}_x - 0.2\dot{\omega}_y \qquad\qquad)\mathbf{k}\end{aligned}$$

לצורך נוחיות החישוב, שים לב לכך ש-$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_{BD}$ הוא $\mathbf{v}_D - \mathbf{v}_B$, שחושב בדוגמה עבור המהירויות.

4) השוואת הביטויים עבור תאוצת הנקודה D

מהשוואת הביטויים עבור תאוצת הנקודה D , אותם קיבלנו בשלבים השני והשלישי, נקבל

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_C \times \mathbf{R}_{CD} + \boldsymbol{\omega}_C \times (\boldsymbol{\omega}_C \times \mathbf{R}_{CD}) = \mathbf{a}_B + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{R}_{BD} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_{BD}) \; ,$$

ומכאן

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_C \times \mathbf{R}_{CD} + \boldsymbol{\omega}_C \times (\boldsymbol{\omega}_C \times \mathbf{R}_{CD}) - \mathbf{a}_B - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_{BD}) = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{R}_{BD} \; .$$

היצגנו את המשוואה בצורה זו, כדי להדגיש שבאגף ימין נמצא הוקטור הנעלם $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ ככופל במכפלה וקטורית, ובאגף שמאל יש בעצם רק סקלר אחד נעלם, הוא גודל התאוצה הזוויתית של הגלגל C . הצבת הגדלים הידועים תיתן את שלוש המשוואות בארבעה נעלמים

$$\begin{aligned}180 &= \qquad\qquad - 0.3\dot{\omega}_y - 0.6\dot{\omega}_z\\ 8069 - 0.06\dot{\omega}_C &= 0.3\dot{\omega}_x \qquad\qquad + 0.2\dot{\omega}_z\\ -5832 - 0.08\dot{\omega}_C &= 0.6\dot{\omega}_x - 0.2\dot{\omega}_y \quad .\end{aligned}$$

5) חישוב $\dot{\boldsymbol{\omega}}_C$ ותאוצתה של הנקודה D

שוב אנו משתמשים באותה שיטה כמו בשלב המתאים בחישוב המהירויות. בכדי שלמשוואה

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_C \times \mathbf{R}_{CD} + \boldsymbol{\omega}_C \times (\boldsymbol{\omega}_C \times \mathbf{R}_{CD}) - \mathbf{a}_B - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_{BD}) = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{R}_{BD} \; ,$$

יהיה פתרון דרוש שיתקיים

$$[\dot{\boldsymbol{\omega}}_C \times \mathbf{R}_{CD} + \boldsymbol{\omega}_C \times (\boldsymbol{\omega}_C \times \mathbf{R}_{CD}) - \mathbf{a}_B - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_{BD})] \cdot \mathbf{R}_{BD} = 0 ,$$

משום שתוצאת מכפלה וקטורית צריכה להיות ניצבת לכופלים. במשוואה זו, רכיבי הכופל בסוגריים המרובעים, הם הביטויים המופיעים באגפים השמאליים של מערכת המשוואות שקיבלנו, לכן, הצבתם והצבת רכיבי $\mathbf{R}_{BD}$ תיתן

$$0 = (180)(0.2) + (8069 - 0.06\dot{\omega}_C)(0.6) + (-5832 - 0.08\dot{\omega}_C)(-0.3) ,$$

וניתן לחלץ מכאן

$$\dot{\omega}_C = 552{,}250 \text{ rad/s}^2 .$$

הצבה בביטוי עבור $\mathbf{a}_D$ שקיבלנו בשלב השני תיתן

$$\mathbf{a}_D = -25935\mathbf{j} - 49580\mathbf{k} \text{ m/s}^2 ,$$

והצבה במערכת המשוואות אותן קיבלנו בשלב הקודם תיתן

$$\begin{aligned} 180 &= & &- 0.3\dot{\omega}_y & &- 0.6\dot{\omega}_z \\ -25066 &= 0.3\dot{\omega}_x & & & &+ 0.2\dot{\omega}_z \\ -50012 &= 0.6\dot{\omega}_x & &- 0.2\dot{\omega}_y & & \end{aligned} .$$

כזכור, רק שתיים מתוך שלוש משוואות אלו הן בלתי תלויות.

6) משוואת האילוץ

משוואות האילוץ עבור המהירות הזוויתית אותה קיבלנו בחישוב המהירויות היתה

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{N} = \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{R}_{BD})) = 0 .$$

משוואת האילוץ עבור $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ תתקבל על ידי גזירה של משוואה זו לפי הזמן:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot (\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{R}_{BD})) + \boldsymbol{\omega} \cdot (\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \dot{\mathbf{R}}_{BD})) = 0 ,$$

כאשר וקטור היחידה $\mathbf{k}$ הוא כמובן קבוע. בהציבנו את $\mathbf{N}$ כפי שנמצא בדוגמה עבור המהירויות וכן את

$$\dot{\mathbf{R}}_{BD} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}_{BD}$$

לתוך משוואה זו, נקבל:

$$\begin{aligned} 0 = {} & (\dot{\omega}_x\mathbf{i} + \dot{\omega}_y\mathbf{j} + \dot{\omega}_z\mathbf{k}) \cdot (-0.2\mathbf{i} + 0.6\mathbf{j}) + \\ & +(-36\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 6\mathbf{k}) \cdot \{\mathbf{k} \times [\mathbf{k} \times ((-36\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 6\mathbf{k}) \times (0.2\mathbf{i} + 0.6\mathbf{j} - 0.3\mathbf{k}))]\} \end{aligned} .$$

חישוב המכפלות יתן

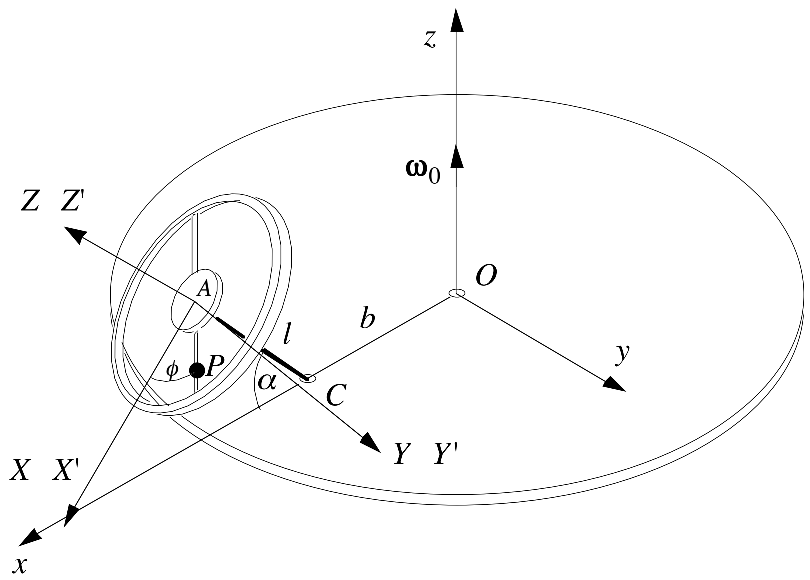
$$\dot{\omega}_x = 720 - 3\dot{\omega}_y .$$

ממשוואה זו בצרוף שתי המשוואות האחרונות של מערכת המשוואות האחרונה שקיבלנו בשלב 5 מתקבל

$$\dot{\omega}_x = -74946\ \text{rad/s}^2\ ,\ \ \dot{\omega}_y = 25222\ \text{rad/s}^2\ ,\ \ \dot{\omega}_z = -12911\ \text{rad/s}^2$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = -74946\mathbf{i} + 25222\mathbf{j} - 12911\mathbf{k}\ \text{rad/s}^2 .$$

דוגמה 4.3.4



תרשים 29

בתרשים 29 מתוארת מערכת המורכבת מדיסקה הסובבת סביב צירה במהירות זוויתית נתונה $\boldsymbol{\omega}_0$. במרחק b ממרכז הדיסקה נמצאת הנקודה C אליה מחובר ציר CA בעל אורך l בזווית α למישור הדיסקה, וסביב הציר CA סובב גלגל בעל שני חישורים. על אחד החישורים מחליק חלקיק P , ובמצב הנתון מרחקו מהמרכז הוא d , מהירותו v_0 , ותאוצתו a_0 יחסית לגלגל. הזווית בה נמצא החישור, יחסית לרדיוס הגלגל המכוון אל הנקודה הנמוכה ביותר על היקף, הגלגל מסומנת ב-ϕ . נתונה המהירות בה סובב הגלגל סביב צירו, $\dot{\phi}$, והתאוצה הזוויתית שלו $\ddot{\phi}$. דרוש לחשב את המהירות והתאוצה של החלקיק P.

פתרון: הבעיה מאופינת בכך שישנם שני גופים קשיחים שסובבים, הגלגל והדיסקה, ונתונה לנו התנועה הסיבובית של הגלגל יחסית לדיסקה. הגישה המוצעת לפתרון בעיות מסוג זה היא פתרון בשלבים באופן הבא. בשלב הראשון אנו מתעלמים מהמהירות הזוויתית של הדיסקה, ומחשבים את המהירות והתאוצה של החלקיק יחסית אליה, על סמך המהירות והתאוצה יחסית לגלגל. במעבר זה מתאור תנועת החלקיק יחסית לגלגל לתאור תנועת החלקיק יחסית לדיסקה, אנו לוקחים בחשבון את התנועה של הגלגל יחסית לדיסקה. ניתן לאמר שלצורך חישוב זה, אנו משתמשים במשוואות שקיבלנו עבור חישוב מהירות ותאוצת חלקיק שתנועתו יחסית לגוף קשיח נתונה, כאשר מערכת צירים הצמודה לדיסקה משמשת בשלב זה עבורינו כמערכת המרחב.

בשלב השני, כאשר תאור תנועת החלקיק יחסית לדיסקה ידוע כבר, אנו משתמשים במשוואות פעם נוספת, בכדי לקבל את תאור המהירות והתאוצה יחסית למערכת המרחב. בשלב זה, תנועת הדיסקה יחסית למערכת צירים האינרציאלית תילקח בחשבון, כלומר, נשתמש במהירות הזוויתית $\boldsymbol{\omega}_0$.

באופן מעשי, על מנת לבצע את שני השלבים כמתואר, עלינו לבחור שלוש מערכות צירים: הראשונה, X, Y, Z, צמודה לגלגל, הוא הגוף הקשיח שיחסית אליו תנועת החלקיק נתונה. מהירות ותאוצה יחסית למערכת זו יסומנו על ידי $\mathbf{v}_{XYZ}$, $\mathbf{a}_{XYZ}$, בהתאמה. נבחר את מערכת הצירים כך שראשיתה בנקודה A, ציר Z מתלכד עם ציר הגלגל (הישר CA), ובמצב המתואר ציר X מתלכד עם הרדיוס שמצביע לנקודה התחתית על הגלגל. נובע מכך כי

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= d\cos\phi\mathbf{I} + d\sin\phi\mathbf{J}\\ \mathbf{v}_{XYZ} &= v_0\cos\phi\mathbf{I} + v_0\sin\phi\mathbf{J}\\ \mathbf{a}_{XYZ} &= a_0\cos\phi\mathbf{I} + a_0\sin\phi\mathbf{J}\ .\end{aligned}$$

כאמור, בשלב ראשון נמצא את המהירות והתאוצה יחסית למערכת הצמודה לדיסקה. נבחר מערכת צירים X', Y', Z', שמתלכדת רגעית עם המערכת X, Y, Z, אך צמודה לדיסקה. משוואות המעבר של תאור המהירות והתאוצה בין שתי מערכות הן

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \dot{\mathbf{r}}_A + \dot{\mathbf{R}}_{XYZ} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}\\ \ddot{\mathbf{r}} &= \ddot{\mathbf{r}}_A + \ddot{\mathbf{R}}_{XYZ} + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{R} + 2\boldsymbol{\omega}\times\dot{\mathbf{R}}_{XYZ} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R})\ ,\end{aligned}$$

כאשר לצורך המעבר הנוכחי אנו מציבים את הגדלים הבאים: $\dot{\mathbf{r}}_A = \mathbf{0}$, $\ddot{\mathbf{r}}_A = \mathbf{0}$ משום ששתי הראשיות מתלכדות בכל זמן, $\dot{\mathbf{R}}_{XYZ} = \mathbf{v}_{XYZ}$, $\ddot{\mathbf{R}}_{XYZ} = \mathbf{a}_{XYZ}$ מהגדרתם, $\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi}\mathbf{K}$ היא מהירות הסיבוב של מערכת X, Y, Z יחסית למערכת X', Y', Z', והתאוצה הזוויתית היא $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \ddot{\phi}\mathbf{K}$. את המהירות והתאוצה יחסית למערכת X', Y', Z', נסמן בהתאמה על ידי $\mathbf{v}_{X'Y'Z'}$, $\mathbf{a}_{X'Y'Z'}$. אלו הם אותם גדלים אשר יתקבלו מהשימוש במשוואות הכלליות בשלב ראשון זה. נקבל אם כן ($\boldsymbol{\omega}$ ניצב ל-$\mathbf{R}$ ולכן, $\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}) = -\omega^2\mathbf{R}$),

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{X'Y'Z'} &= v_0\cos\phi\mathbf{I} + v_0\sin\phi\mathbf{J} + \dot{\phi}\mathbf{K}\times(d\cos\phi\mathbf{I} + d\sin\phi\mathbf{J})\\ &= (v_0\cos\phi - \dot{\phi}d\sin\phi)\mathbf{I} + (v_0\sin\phi + \dot{\phi}d\cos\phi)\mathbf{J}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{X'Y'Z'} &= a_0\cos\phi\mathbf{I} + a_0\sin\phi\mathbf{J} + \ddot{\phi}\mathbf{K}\times(d\cos\phi\mathbf{I} + d\sin\phi\mathbf{J}) +\\ &\qquad + 2\dot{\phi}\mathbf{K}\times(v_0\cos\phi\mathbf{I} + v_0\sin\phi\mathbf{J}) - \dot{\phi}^2(\cos\phi\mathbf{I} + d\sin\phi\mathbf{J})]\\ &= (a_0\cos\phi - 2\dot{\phi}v_0\sin\phi - \dot{\phi}^2 d\cos\phi - \ddot{\phi}d\sin\phi)\mathbf{I} +\\ &\qquad +(a_0\sin\phi + 2\dot{\phi}v_0\cos\phi - \dot{\phi}^2 d\sin\phi + \ddot{\phi}d\cos\phi)\mathbf{J}\ .\end{aligned}$$

בשלב השני עלינו לעבור מתאור המהירות והתאוצה יחסית למערכת X', Y', Z', שסובבת במהירות $\boldsymbol{\omega}_0 = \omega_0\mathbf{k}$, לתאור המהירות והתאוצה יחסית למערכת אינרציאלית x, y, z, אותה אנו בוחרים באופן טבעי כך, שראשיתה בציר הדיסקה, ציר z הוא ציר הסיבוב, וציר x מצביע בכיוון הנקודה C. במשוואות הכלליות נציב עכשיו את הגדלים הבאים: עבור $\dot{\mathbf{R}}_{XYZ}$ ו-$\ddot{\mathbf{R}}_{XYZ}$ נציב את $\mathbf{v}_{X'Y'Z'}$, $\mathbf{a}_{X'Y'Z'}$ שקיבלנו בשלב הקודם. מהירות הראשית $\dot{\mathbf{r}}_A$ ותאוצת הראשית $\ddot{\mathbf{r}}_A$, הן אכן המהירות והתאוצה של הנקודה A (שהיא ראשית המערכת X', Y', Z') כנקודת חומר על הדיסקה. שימוש במשוואות הכלליות עבור מהירות ותאוצה עבור הנקודה A יתנו ($\boldsymbol{\omega}_0$ קבועה)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}}_A &= \boldsymbol{\omega}_0\times\mathbf{R}_{OA}\\ \ddot{\mathbf{r}}_A &= \boldsymbol{\omega}_0\times(\boldsymbol{\omega}_0\times\mathbf{R}_{OA})\ .\end{aligned}$$

עבור $\mathbf{R}$ עלינו להציב כמובן את $\mathbf{R}_{AP} = d\cos\phi\mathbf{I} + d\sin\phi\mathbf{J}$ שהוא הוקטור המצביע מראשית המערכת הסובבת אל הנקודה הנדונה. מכאן

$$\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{R}_{OA} + \mathbf{v}_{X'Y'Z'} + \boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{R}_{AP}$$
$$\ddot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega}_0 \times (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{R}_{OA}) + \mathbf{a}_{X'Y'Z'} + 2\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{v}_{X'Y'Z'} + \boldsymbol{\omega}_0 \times (\boldsymbol{\omega}_0 \times \mathbf{R}_{AP}) .$$

כל הביטויים המופיעים במשוואות אלו ידועים לנו, ועל כן אין כל קושי עקרוני בחישוב המהירות והתאוצה. אולם, עלינו לשים לב לכך שהגדלים $\mathbf{v}_{X'Y'Z'}$, $\mathbf{a}_{X'Y'Z'}$ שכבר חישבנו, וכן גדלים נוספים, מבוטאים על ידי רכיביהם יחסית למערכת X, Y, Z . לכן, על מנת לחבר את תוצאות המכפלות השונות, עלינו לדאוג לכך שכל המחוברים יבוטאו באמצעות רכיביהם במערכת זו ובפרט:

$$\boldsymbol{\omega}_0 = -\omega_0\cos\alpha\mathbf{I} + \omega_0\sin\alpha\mathbf{K} ,$$
$$\mathbf{R}_{OA} = b\sin\alpha\mathbf{I} + (b\cos\alpha + l)\mathbf{K} .$$

יש לשים לב להבדל, בין וקטורי המהירות או התאוצה של החלקיק יחסית למערכת צירים מסוימת, לבין כתיבת רכיבי הוקטורים של המהירות או התאוצה המוחלטים במערכת צירים זו. אנו נקבל את המהירות והתאוצה של החלקיק יחסית למערכת המרחב. אולם את שני הוקטורים הללו נבטא על ידי רכיביהם במערכת צירי הגוף. הדבר עשוי להשמע לסטודנט חסר הניסיון כסתירה, אך אל לו להתבלבל. לדוגמה, יכולנו לבטא את המהירות היחסית שבין החלקיק לגלגל באמצאות רכיביה במערכת x, y, z וכו׳. "ערוב מערכות" מסוג זה יופיע מספר פעמים בהמשך, ורצוי שהסטודנט יתרגל להבין את ההבדל בין חישוב נגזרת של וקטור יחסית למערכת זו או אחרת, לבין תאור וקטור נתון על ידי רכיביו במערכת זו או אחרת.

חישוב מייגע יתן

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} = {} & (v_0\cos\phi - \dot{\phi}d\sin\phi - \omega_0 d\sin\alpha\sin\phi)\mathbf{I} + \\ & + (\omega_0 b + \omega_0 l\cos\alpha + v_0\sin\phi + \dot{\phi}d\cos\phi - \omega_0 d\sin\alpha\cos\phi)\mathbf{J} - \omega_0 d\cos\alpha\sin\phi\mathbf{K} ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{r}} = {} & (-\omega_0^2 b\sin\alpha + \omega_0^2 l\sin\alpha\cos\alpha + a_0\cos\phi - 2\dot{\phi}v_0\sin\phi - \dot{\phi}^2 d\cos\phi - \ddot{\phi}d\sin\phi \\ & -2v_0\omega_0\sin\alpha\sin\phi - 2\omega_0\dot{\phi}d\sin\alpha\cos\phi + \omega_0^2 d\sin^2\alpha\cos\phi)\mathbf{I} + \\ & +(a_0\sin\phi + 2\dot{\phi}v_0\cos\phi - \dot{\phi}^2 d\sin\phi + \ddot{\phi}d\cos\phi \\ & +2v_0\omega_0\sin\alpha\cos\phi - 2\omega_0\dot{\phi}d\sin\alpha\sin\phi - \omega_0^2 d\sin\phi)\mathbf{J} \\ & +(-\omega_0^2 b\cos\alpha - \omega_0^2 l\cos^2\alpha - 2v_0\omega_0\cos\alpha\sin\phi - 2\omega_0\dot{\phi}d\cos\alpha\cos\phi \\ & +\omega_0^2 d\sin\alpha\cos\alpha\cos\phi)\mathbf{K} .\end{aligned}$$

4.4.1 המכפלה הוקטורית המשולשת

בסעיף זה ברצוננו לפתח את הזהות

$$\boxed{\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v}-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{w}\,,}$$

שמתקיימת בין שלושה וקטורים כלשהם, ואשר בה נשתמש בסעיף 4.4.3. (שים לב ששני הביטויים בסוגריים באגף ימין הם סקלרים, ושני האיברים בהם הם מופיעים הם לכן וקטורים שמתקבלים ממכפלת סקלר בוקטור.)

ההוכחה היא פשוט על ידי חישוב מפורט של שני האגפים. אגף שמאל יתן

$$\mathbf{v}\times\mathbf{w}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ v_x&v_y&v_z\\ w_x&w_y&w_z\end{vmatrix}=(v_yw_z-v_zw_y)\mathbf{i}+(v_zw_x-v_xw_z)\mathbf{j}+(v_xw_y-v_yw_x)\mathbf{k}\,,$$

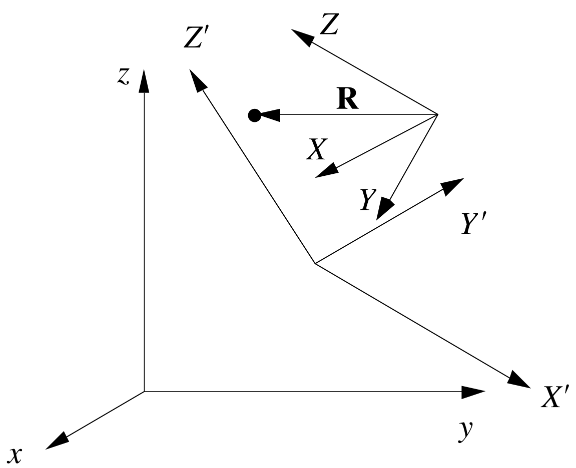
$$\begin{aligned}\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})&=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ u_x&u_y&u_z\\ v_yw_z-v_zw_y&v_zw_x-v_xw_z&v_xw_y-v_yw_x\end{vmatrix}\\ &=(u_yv_xw_y-u_yv_yw_x-u_zv_zw_x+u_zv_xw_z)\mathbf{i}+\\ &\quad+(u_zv_yw_z-u_zv_zw_y-u_xv_xw_y+u_xv_yw_x)\mathbf{j}+\\ &\quad+(u_xv_zw_x-u_xv_xw_z-u_zv_yw_z+u_zv_zw_y)\mathbf{k}\end{aligned}\,.$$

חישוב אגף ימין נותן

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v}-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{w}&=(u_xw_x+u_yw_y+u_zw_z)v_x\mathbf{i}-(u_xv_x+u_yv_y+u_zv_z)w_x\mathbf{i}\\ &\quad+(u_xw_x+u_yw_y+u_zw_z)v_y\mathbf{j}-(u_xv_x+u_yv_y+u_zv_z)w_y\mathbf{j}\\ &\quad+(u_xw_x+u_yw_y+u_zw_z)v_z\mathbf{k}-(u_xv_x+u_yv_y+u_zv_z)w_z\mathbf{k}\end{aligned}\,,$$

כאשר האיברים בסוגריים באגף ימין הן המכפלות הסקלריות המתאימות. אנו שמים לב לכך שבכל שורה באגף ימין שני איברים מבטלים זה את זה (אותם האיברים בהם אותו מציין חוזר שלוש פעמים), ואם כן, שני האגפים של הנוסחה אכן שווים.

4.4.2 המהירות הזוויתית של גוף אשר סובב יחסית לגוף אחר



תרשים 30

בתרשים 30 מתוארות באופן סכימתי שלוש מערכות צירים. האחת, x, y, z , היא מערכת המרחב. השניה, X', Y', Z' , צמודה לגוף קשיח, אותו נכנה גוף מספר 1, אשר סובב במהירות זוויתית $\boldsymbol{\omega}_1$ יחסית למערכת המרחב. המערכת השלישית, X, Y, Z , צמודה לגוף קשיח, אותו נכנה גוף מספר 2, אשר סובב במהירות זוויתית $\boldsymbol{\omega}_{21}$ יחסית למערכת X', Y', Z' , כלומר, יחסית לגוף מספר 1. מטרתינו היא לחשב את המהירות הזוויתית $\boldsymbol{\omega}_2$ של גוף מספר 2 יחסית למערכת המרחב, כלומר, יחסית למערכת x, y, z. שים לב, שאין חשיבות לכך שהמערכת x, y, z היא מערכת המרחב. החישוב אותו נעשה תופס במידה שווה אם תנועתו של גוף מספר 1 נתונה יחסית לגוף קשיח שלישי כלשהו, ואנו מעונינים לחשב את המהירות שבה סובב גוף מספר 2 יחסית לאותו גוף שלישי (שאינו בהכרח נייח).

את המהירות $\boldsymbol{\omega}_2$ נחשב באופן הבא. נבחר נקודת חומר כלשהי בגוף מספר 2, ונסמן את וקטור המקום שלה במערכת הגוף על ידי $\mathbf{R}$. נשתמש במשוואה שקיבלנו בסעיף 4.2.1 עבור המעבר מהמערכת X, Y, Z למערכת X', Y', Z' , כאשר המהירות הזוויתית בה אנו משתמשים היא $\boldsymbol{\omega}_{21}$, שמבטאת את המהירות הזוויתית היחסית בין שתי המערכות. מהירותה של נקודת החומר יחסית למערכת גוף מספר 2, היא המערכת X, Y, Z , מתאפסת כמובן ועל כן,

$$\dot{\mathbf{R}}_{X'Y'Z'} = \boldsymbol{\omega}_{21} \times \mathbf{R} \,.$$

כעת ניתן לחשב את קצב שינוי הוקטור $\mathbf{R}$ יחסית למערכת x, y, z , על ידי ישום המשוואה אותה קיבלנו בסעיף 4.2.8. המהירות הזוויתית בה נשתמש היא כמובן $\boldsymbol{\omega}_1$, ולכן (הוקטור $\mathbf{R}$ הוא כמובן אותו וקטור בכל המערכות),

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{R}} &= \dot{\mathbf{R}}_{X'Y'Z'} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{R} \\ &= \boldsymbol{\omega}_{21} \times \mathbf{R} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{R} \,,\end{aligned}$$

$$\dot{\mathbf{R}} = (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_{21}) \times \mathbf{R} \,.$$

מאידך, אם המהירות הזוויתית של גוף מספר 2 יחסית למערכת x, y, z היא $\boldsymbol{\omega}_2$, אזי חייב להתקיים גם

$$\dot{\mathbf{R}} = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{R} \,,$$

ולכן,

$$(\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_{21}) \times \mathbf{R} = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{R} \,.$$

העובדה שהמשוואה האחרונה תופסת עבור וקטור אחד $\mathbf{R}$, אינה גוררת ש-$\boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_{21}$. אולם, הנקודה אליה מצביע הוקטור $\mathbf{R}$, היא נקודה שרירותית, ולכן $(\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_{21} - \boldsymbol{\omega}_2) \times \mathbf{R} = \mathbf{0}$ לכל $\mathbf{R}$. מהגדרת המכפלה הוקטורית, הוקטור $\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_{21} - \boldsymbol{\omega}_2$ צריך להיות מקביל לכל וקטור שנבחר ובפרט לשלושה וקטורי בסיס. מתקבלת סתירה ומכאן $\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_{21} - \boldsymbol{\omega}_2 = \mathbf{0}$. הקשר בין המהירויות הזוויתיות הוא איפוא

$$\boxed{\boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_{21} \,.}$$

4.4.3 התאוצה הזוויתית של גוף אשר סובב יחסית לגוף אחר

בסעיף זה ברצוננו למצוא את התלות שבין התאוצה הזוויתית $\dot{\boldsymbol{\omega}}_2$ של גוף מספר 2, לבין התאוצה הזוויתית $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{21}$ שיש לו יחסית לגוף מספר 1, והתאוצה הזוויתית $\dot{\boldsymbol{\omega}}_1$ שיש לגוף מספר 1.

שוב יהיה $\mathbf{R}$ וקטור המצביע מראשית מערכת גוף 2 אל נקודת חומר כלשהי בגוף. אנו נחשב את הנגזרת השניה שלו בשני אופנים ונשווה את התוצאה. פעם יהיה החישוב על ידי מעבר למערכת גוף 1 על ידי שימוש בנתונים עבור התנועה היחסית, ואז מעבר נוסף למערכת המרחב על ידי שימוש בנתונים עבור תנועת גוף 1. הדרך השניה לחישוב $\ddot{\mathbf{R}}$, היא על ידי מעבר ישיר מגוף מספר 2 למערכת המרחב כפי שניתן לעשות בשימוש $\dot{\boldsymbol{\omega}}_2$.

על ידי שימוש במשוואות שקיבלנו בסעיף 4.3.1, ובהתחשבנו בכך שהמהירות היחסית והתאוצה היחסית בין נקודת החומר והגוף מתאפסת, נוכל לקבל את $\ddot{\mathbf{R}}_{X'Y'Z'}$ (ראה משוואה בסעיף 4.3.1 עבור $\ddot{\mathbf{R}}$):

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{R}}_{X'Y'Z'} &= \boldsymbol{\omega}_{21} \times (\boldsymbol{\omega}_{21} \times \mathbf{R}) + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{21} \times \mathbf{R} + \ddot{\mathbf{R}}_{XYZ} + 2\boldsymbol{\omega}_{21} \times \dot{\mathbf{R}}_{XYZ} \\ &= \boldsymbol{\omega}_{21} \times (\boldsymbol{\omega}_{21} \times \mathbf{R}) + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{21} \times \mathbf{R} \,.\end{aligned}$$

נעבור כעת למערכת המרחב על ידי שימוש באותה נוסחה כללית

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{R}} &= \boldsymbol{\omega}_1 \times (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{R}) + \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \times \mathbf{R} + \ddot{\mathbf{R}}_{X'Y'Z'} + 2\boldsymbol{\omega}_1 \times \dot{\mathbf{R}}_{X'Y'Z'} \\ &= \boldsymbol{\omega}_1 \times (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{R}) + \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \times \mathbf{R} + \boldsymbol{\omega}_{21} \times (\boldsymbol{\omega}_{21} \times \mathbf{R}) + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{21} \times \mathbf{R} + 2\boldsymbol{\omega}_1 \times (\boldsymbol{\omega}_{21} \times \mathbf{R}) \,.\end{aligned}$$

מאידך, במעבר מגוף מספר 2 למערכת המרחב ישירות באמצעות $\boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_{21}$ ו- $\dot{\boldsymbol{\omega}}_2$ נקבל

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{R}} &= \boldsymbol{\omega}_2 \times (\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{R}) + \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \times \mathbf{R} + \ddot{\mathbf{R}}_{XYZ} + 2\boldsymbol{\omega}_2 \times \dot{\mathbf{R}}_{XYZ} \\ &= (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_{21}) \times [(\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_{21}) \times \mathbf{R}] + \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \times \mathbf{R} \\ &= \boldsymbol{\omega}_1 \times (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{R}) + \boldsymbol{\omega}_{21} \times (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{R}) + \boldsymbol{\omega}_1 \times (\boldsymbol{\omega}_{21} \times \mathbf{R}) + \boldsymbol{\omega}_{21} \times (\boldsymbol{\omega}_{21} \times \mathbf{R}) + \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \times \mathbf{R} \,.\end{aligned}$$

השוואת ביטוי זה עם הביטוי שהתקבל קודם, במעבר בשני שלבים, תיתן

$$\boldsymbol{\omega}_1\times(\boldsymbol{\omega}_1\times\mathbf{R})+\boldsymbol{\omega}_{21}\times(\boldsymbol{\omega}_1\times\mathbf{R})+\boldsymbol{\omega}_1\times(\boldsymbol{\omega}_{21}\times\mathbf{R})+\boldsymbol{\omega}_{21}\times(\boldsymbol{\omega}_{21}\times\mathbf{R})+\dot{\boldsymbol{\omega}}_2\times\mathbf{R}=$$
$$=\boldsymbol{\omega}_1\times(\boldsymbol{\omega}_1\times\mathbf{R})+\dot{\boldsymbol{\omega}}_1\times\mathbf{R}+\boldsymbol{\omega}_{21}\times(\boldsymbol{\omega}_{21}\times\mathbf{R})+\dot{\boldsymbol{\omega}}_{21}\times\mathbf{R}+2\boldsymbol{\omega}_1\times(\boldsymbol{\omega}_{21}\times\mathbf{R})\,,$$

ומכאן מתקבל הקשר

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_2\times\mathbf{R}=\dot{\boldsymbol{\omega}}_1\times\mathbf{R}+\dot{\boldsymbol{\omega}}_{21}\times\mathbf{R}+\boldsymbol{\omega}_1\times(\boldsymbol{\omega}_{21}\times\mathbf{R})-\boldsymbol{\omega}_{21}\times(\boldsymbol{\omega}_1\times\mathbf{R})\,.$$

משוואה זו ניתן לפשט על ידי יישום המשוואה $\mathbf{u}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{w})=(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})\mathbf{v}-(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})\mathbf{w}$ שקיבלנו בסעיף 4.4.1, בשני האברים האחרונים בצד ימין

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_1\times(\boldsymbol{\omega}_{21}\times\mathbf{R})-\boldsymbol{\omega}_{21}\times(\boldsymbol{\omega}_1\times\mathbf{R})&=(\boldsymbol{\omega}_1\cdot\mathbf{R})\boldsymbol{\omega}_{21}-(\boldsymbol{\omega}_1\cdot\boldsymbol{\omega}_{21})\mathbf{R}-[(\boldsymbol{\omega}_{21}\cdot\mathbf{R})\boldsymbol{\omega}_1-(\boldsymbol{\omega}_{21}\cdot\boldsymbol{\omega}_1)\mathbf{R}]\\&=(\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{\omega}_1)\boldsymbol{\omega}_{21}-(\mathbf{R}\cdot\boldsymbol{\omega}_{21})\boldsymbol{\omega}_1\\&=\mathbf{R}\times(\boldsymbol{\omega}_{21}\times\boldsymbol{\omega}_1)\\&=(\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{\omega}_{21})\times\mathbf{R}\,.\end{aligned}$$

לקבלת השורה השניה השתמשנו בכך שניתן להפוך את סדר הכופלים במכפלה סקלרית, לקבלת השורה השלישית יישמנו את הנוסחה עבור המכפלה הוקטורית המשולשת "בכיוון ההפוך", ולקבלת השורה הרביעית הפכנו את הסדר של מכפלות וקטוריות פעמיים (בכל פעם המכפלה הופכת סימן כך שבסופו של דבר הסימן לא משתנה). כאשר אנו מציבים את הביטוי המפושט, עבור שתי המכפלות הוקטוריות המשולשות, בקשר שקיבלנו, נותר

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_2\times\mathbf{R}=\dot{\boldsymbol{\omega}}_1\times\mathbf{R}+\dot{\boldsymbol{\omega}}_{21}\times\mathbf{R}+(\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{\omega}_{21})\times\mathbf{R}$$
$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_2\times\mathbf{R}=[\dot{\boldsymbol{\omega}}_1+\dot{\boldsymbol{\omega}}_{21}+(\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{\omega}_{21})]\times\mathbf{R}\,.$$

שוב צריכה משוואה זו להתקיים עבור וקטור $\mathbf{R}$ כלשהו ונובע מכך כי

$$\boxed{\dot{\boldsymbol{\omega}}_2=\dot{\boldsymbol{\omega}}_1+\dot{\boldsymbol{\omega}}_{21}+(\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{\omega}_{21})\,.}$$

שים לב לכך ש-$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{21}$ היא הנגזרת לפי הזמן של $\boldsymbol{\omega}_{21}$ כפי שהיא נמדדת במערכת X', Y', Z', ואפילו אינה הנגזרת "האמיתית" לפי הזמן של הוקטור $\boldsymbol{\omega}_{21}$, שמתאר את הסיבוב היחסי בין גוף מספר 2 לגוף מספר 1. לו רצינו להיות מותאמים לכללי הסימנים שקבענו היה עלינו לסמן אותה על ידי $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{21X'Y'Z'}$. אנו לא עשינו זאת בכדי לא לסרבל את הסימון. אם נשתמש בסימון המדויק, הכלל למעבר הנגזרת של וקטור אותו קיבלנו בסעיף 4.2.8, עבור המעבר מהמערכת X', Y', Z' למערכת x, y, z, יתן

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{21xyz}=\dot{\boldsymbol{\omega}}_{21X'Y'Z'}+\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{\omega}_{21}\,,$$

כאשר $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{21xyz}$ מסמנת את הנגזרת האמיתית של $\boldsymbol{\omega}_{21}$, זו יחסית למערכת x, y, z. אם נשתמש בסימון המקוצר עבור $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{21X'Y'Z'}$, קיבלנו כי

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{21xyz}=\dot{\boldsymbol{\omega}}_{21}+\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{\omega}_{21}\,.$$

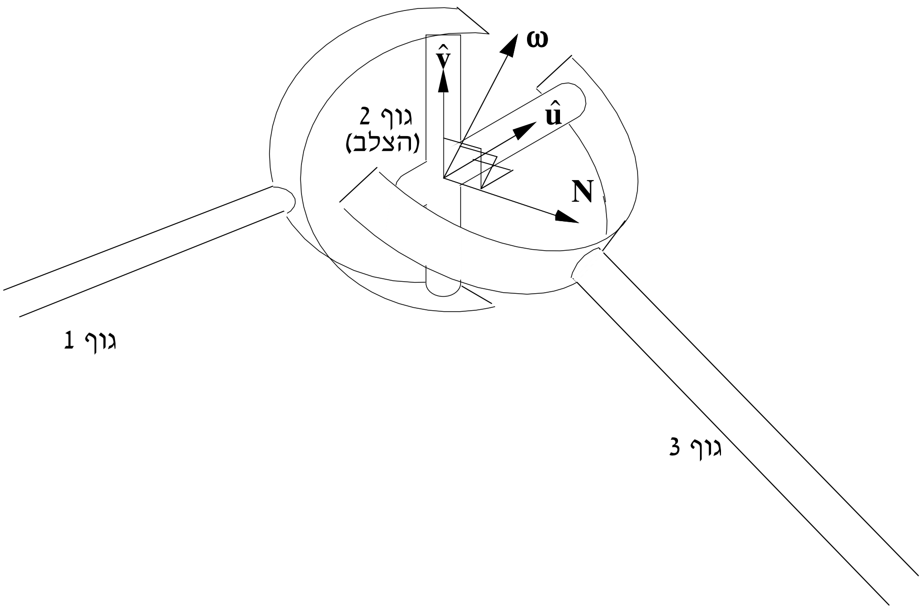
ניתן אם כן לרשום את התוצאה שקיבלנו בצורה

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_2=\dot{\boldsymbol{\omega}}_1+\dot{\boldsymbol{\omega}}_{21xyz}\,,$$

שמציגה, כמו במקרה של המהירות הזוויתית, את התאוצה הזוויתית כסכום שתי התאוצות הזוויתיות. יש מקום לשאלה, אם לאור זאת, לא כדאי היה לקבל את המשואה ל-$\dot{\boldsymbol{\omega}}_2$ על ידי גזירה "נכונה" של הביטוי $\boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_{21}$. בכל מקרה, הדרך הארוכה והמסודרת שהוצגה פה, מוכיחה את ההתאמה בין החישובים בשתי הדרכים השונות לחישוב $\ddot{\mathbf{R}}$.

4.4.4 דוגמה

עבור המערכת המתוארת בתרשים 31, המורכבת משני גופים (גוף 1 וגוף 3) המחוברים על ידי מפרק אוניברסלי, נתונים $\boldsymbol{\omega}_1$, $\dot{\boldsymbol{\omega}}_1$, $\boldsymbol{\omega}_3$, $\dot{\boldsymbol{\omega}}_3$ (כפי שמצאנו למשל בדוגמאות 4.2.7 ו-4.3.3). דרוש לחשב את הקשר בין המהירויות הזוויתיות שנובע מהאילוץ. עבור המצב המתואר חשב גם את $\boldsymbol{\omega}_{21}$ - המהירות היחסית בין הצלב לגוף 1 סביב הציר המתואר על ידי וקטור היחידה הנתון $\hat{\mathbf{v}}$, את $\boldsymbol{\omega}_{32}$ - המהירות היחסית בין גוף 3 לצלב סביב הציר המתואר על ידי וקטור היחידה הנתון $\hat{\mathbf{u}}$, ואת התאוצות הזוויתיות היחסיות $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{21}$ ו- $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{32}$.



תרשים 31

פתרון: על ידי יישום פעמיים של הכלל שלמדנו בסעיף 4.4.2:

$$\boldsymbol{\omega}_3 = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_{21} + \boldsymbol{\omega}_{32} .$$

מצורת החיבורים נובע כי

$$\boldsymbol{\omega}_{21} = \omega_{21}\hat{\mathbf{v}} , \quad \boldsymbol{\omega}_{32} = \omega_{32}\hat{\mathbf{u}} ,$$

ולכן,

$$\boldsymbol{\omega}_3 = \boldsymbol{\omega}_1 + \omega_{21}\hat{\mathbf{v}} + \omega_{32}\hat{\mathbf{u}} ,$$

$$\boldsymbol{\omega}_3 - \boldsymbol{\omega}_1 = \omega_{21}\hat{\mathbf{v}} + \omega_{32}\hat{\mathbf{u}} .$$

$\hat{\mathbf{v}}$ ו-$\hat{\mathbf{u}}$ הם וקטורי יחידה הניצבים זה לזה, והוקטור $\mathbf{N}$ ניצב לשניהם. על כן, כפל סקלרי של המשוואה האחרונה ב-$\hat{\mathbf{v}}$, ב-$\hat{\mathbf{u}}$, וב-$\mathbf{N}$, יתן את התוצאות הדרושות לגבי המהירויות הזוויתיות:

$$(\boldsymbol{\omega}_3 - \boldsymbol{\omega}_1)\cdot\hat{\mathbf{v}} = \omega_{21}\ ,\ \ (\boldsymbol{\omega}_3 - \boldsymbol{\omega}_1)\cdot\hat{\mathbf{u}} = \omega_{32}\ ,\ \ (\boldsymbol{\omega}_3 - \boldsymbol{\omega}_1)\cdot\mathbf{N} = 0\ .$$

בפרט, משוואת האילוץ היא $\boldsymbol{\omega}_3\cdot\mathbf{N} = \boldsymbol{\omega}_1\cdot\mathbf{N}$, לפיכך, לשתי המהירויות הזוויתיות אותו היטל בכיוון הניצב למישור הצלב. בדוגמה 4.2.7, $\boldsymbol{\omega}_1$ היתה ניצבת ל-$\mathbf{N}$ (כי היתה מקבילה ל-$\mathbf{k}$), ולכן משוואת האילוץ שהתקבלה היתה $\boldsymbol{\omega}_3\cdot\mathbf{N} = 0$.

לצורך חישוב התאוצות הזוויתיות היחסיות, נשתמש פעמיים בקשר שמצאנו בסעיף 4.4.3, פעם לגבי התנועה של הצלב יחסית לגוף מספר 1, ופעם עבור תנועת גוף מספר 3 יחסית לצלב. יתקבל

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 = \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{21} + \boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{\omega}_{21}\ ,\ \ \dot{\boldsymbol{\omega}}_3 = \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{32} + \boldsymbol{\omega}_2\times\boldsymbol{\omega}_{32}\ .$$

על ידי הצבה של $\dot{\boldsymbol{\omega}}_2$ מהמשוואה השמאלית, ושימוש ב-$\boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_{21}$ במשוואה עבור $\dot{\boldsymbol{\omega}}_3$, נקבל

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_3 = \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{21} + \boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{\omega}_{21} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{32} + (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_{21})\times\boldsymbol{\omega}_{32}\ .$$

הנעלמים היחידים במשוואה זו הם $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{32}$ ו-$\dot{\boldsymbol{\omega}}_{21}$, ועבורם ניתן לכתוב: $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{32} = \dot{\omega}_{32}\hat{\mathbf{u}}\ ,\ \dot{\boldsymbol{\omega}}_{21} = \dot{\omega}_{21}\hat{\mathbf{v}}$. ניתן אם כן לכתוב מחדש את המשוואה בצורה

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_3 - \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 - \boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{\omega}_{21} - (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_{21})\times\boldsymbol{\omega}_{32} = \dot{\omega}_{21}\hat{\mathbf{v}} + \dot{\omega}_{32}\hat{\mathbf{u}}\ ,$$

כך שכל הגדלים באגף שמאל ידועים. כמו בחישוב עבור המהירויות הזוויתיות היחסיות נכפול את המשוואה סקלרית פעם ב-$\hat{\mathbf{v}}$ ופעם ב-$\hat{\mathbf{u}}$ לצורך חילוץ התאוצות הזוויתיות היחסיות. התוצאה תהיה

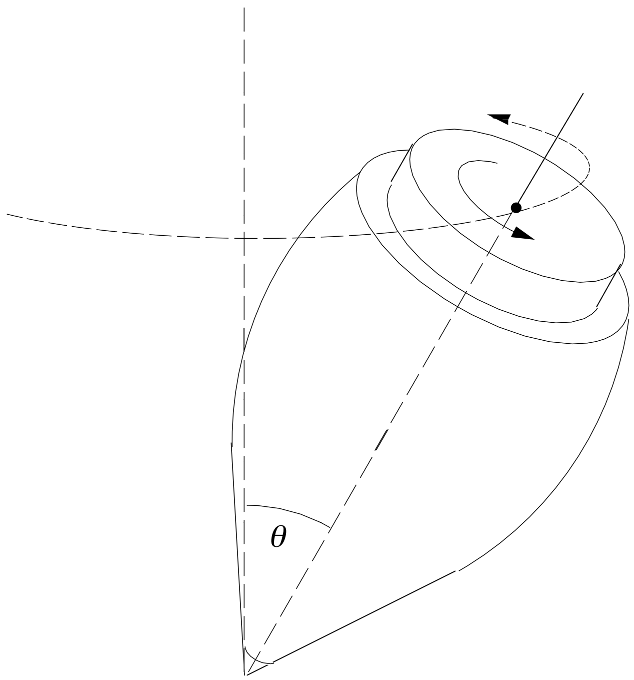
$$\dot{\omega}_{21} = [\dot{\boldsymbol{\omega}}_3 - \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 - \boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{\omega}_{21} - (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_{21})\times\boldsymbol{\omega}_{32}]\cdot\hat{\mathbf{v}}$$
$$\dot{\omega}_{32} = [\dot{\boldsymbol{\omega}}_3 - \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 - \boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{\omega}_{21} - (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_{21})\times\boldsymbol{\omega}_{32}]\cdot\hat{\mathbf{u}}\ .$$

פרק 5: קינטיקה של גוף קשיח

5.0 מבוא

5.0.1 הקדמה

בחלק גדול של המודלים המכניים לחלקי מכונות ומבנים, מתייחסים לגופים השונים כאל גופים קשיחים. כאשר הדפורמציות בגוף קטנות ולא משמעותיות מבחינת התפקיד של הגוף במבנה, כפי שקורה לעיתים קרובות, ההנחה שהגוף קשיח מאפשרת ניתוח יעיל של הדינמיקה. על מנת להבין את התופעות של חוסר איזון דינמי, נקיפה של סביבון, עיקרון הפעולה של מצפן ג׳ירוסקופי, וכמובן תופעות פשוטות יותר, די לנו לדון בגוף בהנחה שהוא קשיח. הדינמיקה התלת-מימדית של גוף קשיח, היא קשה ומסובכת מאוד, והמשוואות הדיפרנציאליות המתארות את תנועת הגוף אינן ליניאריות. בפרק זה נדון במשוואות היסודיות השולטות בתנועת גוף קשיח. אולם בשל הקשיים בפיתרון של משוואות אלו, לא נקבל בדרך כלל את תנועת הגוף בתלות הכוחות החיצוניים, אלא נסתפק בחישובים בהם התנועה נתונה, כולה או בחלקה, ואנו מחפשים את הכוחות החיצוניים, או פרמטרים מוגדרים מאוד של התנועה. לדוגמה, קשה מאוד לחשב את התנועה של סביבון תחת כוחות נתונים כלשהם. אולם, אם אנו מניחים מספר הנחות לגבי התנועה, נוכל למשל לחשב את הזווית בין ציר הסביבון לאנך כאשר הוא תחת השפעת כח הכובד (ראה תרשים 1).



תרשים 1

5.0.2 הנחות היסוד עבור הדינמיקה של גוף קשיח

ההנחה הבסיסית לגבי הדינמיקה של גוף קשיח היא שהגדלים האופייניים ומשוואות התנועה זהות למשוואות עבור מערכת חלקיקים (קשיחה), מלבד ההבדל, שכאן פילוג המסה הוא רציף ולא בדיד. לכן, בכל המשוואות של פרק 3, יוחלפו הסכומים המופיעים בביטויים עבור מערכת חלקיקים, באינטגרלים. במקום $\Sigma_i(\ )m_i$, יופיע $\int_m(\ )dm$.

נסכם אם כן את ההגדרות והמשוואות השונות שמתארות את הדינמיקה של גוף קשיח.

הגדרת מרכז המסה:

$$\mathbf{r}_c = \frac{\int_m \mathbf{r}dm}{m}\ .$$

משוואת התנועה של מרכז המסה:

$$m\ddot{\mathbf{r}}_c = \Sigma\mathbf{F}$$

($\Sigma\mathbf{F}$ הוא כמובן שקול הכוחות החיצוניים).

הגדרת התנע הזוויתי:

$$\mathbf{H} = \int_m \mathbf{r}\times\mathbf{v}dm\ .$$

הגדרת התנע הזוויתי יחסית למרכז המסה:

$$\mathbf{H}_c = \int_m \mathbf{r}'\times\mathbf{v}'dm = \int_m \mathbf{r}'\times\mathbf{v}dm\ .$$

הקשר בין התנע הזוויתי לזה שמתייחס למרכז המסה:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_c + \mathbf{r}_c \times m\mathbf{v}_c\ .$$

משוואת התנע הזוויתי :

$$\Sigma\mathbf{M} = \dot{\mathbf{H}}\ ,$$

או יחסית למרכז המסה: $\Sigma\mathbf{M}_c = \dot{\mathbf{H}}_c$.

הגדרת האנרגיה הקינטית:

$$T = \tfrac{1}{2}\int_m \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}dm\ .$$

הגדרת האנרגיה הקינטית יחסית למרכז המסה:

$$T_c = \tfrac{1}{2}\int_m \mathbf{v}'\cdot\mathbf{v}'dm\ .$$

הקשר בין האנרגיה הקינטית לזו שמתייחסת למרכז המסה:

$$T = T_c + \tfrac{1}{2} m v_c^2 \,.$$

משוואת העבודה והאנרגיה:

$$W_{12} = T_2 - T_1 \,,$$

כאשר ב-W_{12} אנו כוללים את עבודת הכוחות החיצוניים בלבד.

עבודת כוחות הכובד בתנועת הגוף, שווה לעבודה שמבצע המשקל הכללי, עבור תנועת מרכז המסה, וזו שווה גם לשינוי באנרגיה הפוטנציאלית של מרכז המסה.

5.1 טנסור ההתמדה ושימושיו

5.1.1 הביטוי שיש לחשב לקבלת התנע הזוויתי עבור ראשית נייחת ומערכת מרכז המסה

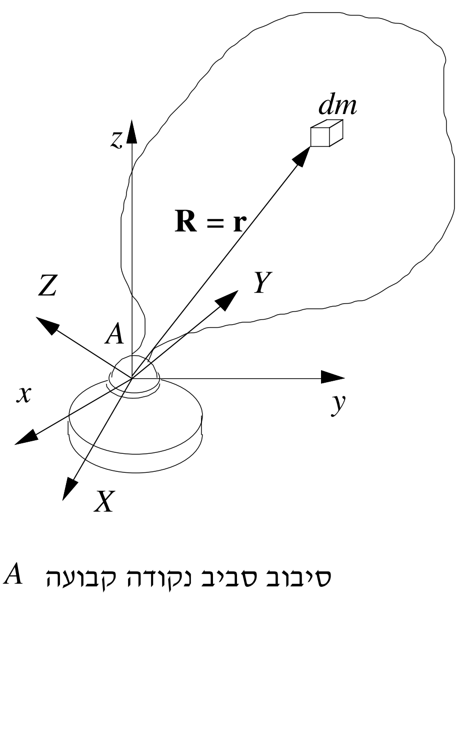
לצורך חישוב התנע הזוויתי של גוף קשיח עלינו לחשב את האינטגרל

$$\mathbf{H} = \int_m \mathbf{r} \times \mathbf{v}\, dm \,,$$

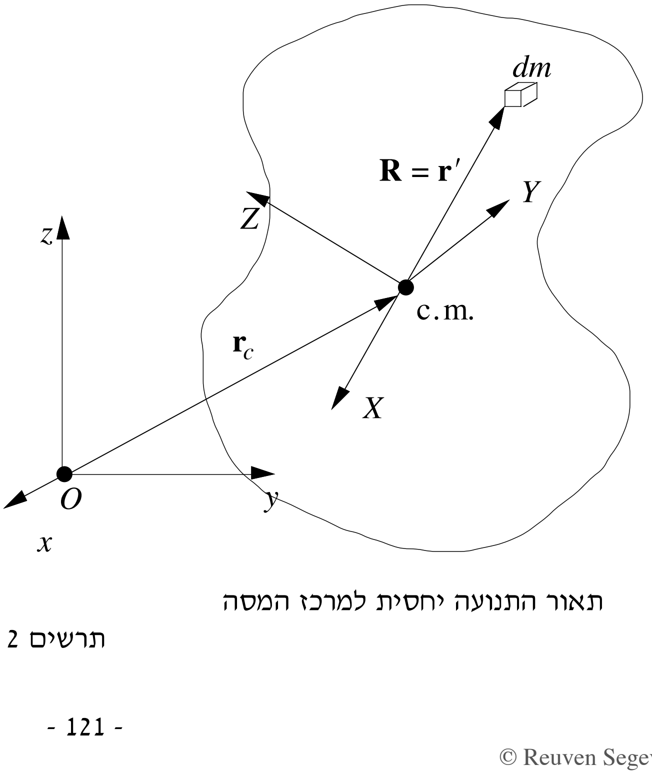
כאשר עבור התנע הזוויתי יחסית למרכז המסה אנו פשוט מציבים את $\mathbf{r}'$ במקום $\mathbf{r}$ ו-$\mathbf{v}'$ במקום $\mathbf{v}$.

אם בגוף הקשיח יש נקודה A הנייחת יחסית למערכת אינרציאלית, טבעי לבחור אותה כראשית המערכת האינרציאלית (ראה תרשים 2). במקרה זה, בהתאם לכללי הסימון עבור תנועת גוף קשיח, $\mathbf{r} = \mathbf{R}$ עבור כל נקודת חומר בגוף, ולכן $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$. התנע הזוויתי יחושב אם כן על ידי

$$\mathbf{H} = \int_m \mathbf{R} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})\, dm \,.$$



סיבוב סביב נקודה קבועה A



תאור התנועה יחסית למרכז המסה

תרשים 2

אם אין בגוף הקשיח נקודה קבועה, נוח יהיה לחשב את התנע הזוויתי יחסית למרכז המסה. נבחר את מרכז המסה כראשית מערכת הגוף ואז $\mathbf{R} = \mathbf{r}'$ (ראה תרשים 2) ו-$\mathbf{v}' = \dot{\mathbf{R}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$. לכן

$$\mathbf{H}_c = \int_m \mathbf{r}' \times \mathbf{v}' dm = \int_m \mathbf{R} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) dm \, .$$

אנו מסיקים אם כן, שהביטויים שעלינו לחשב על מנת לקבל את התנע הזוויתי, הם זהים בשני המקרים: הן עבור ראשית שהיא נקודה קבועה בגוף, והן עבור ראשית הצמודה למרכז המסה. בעתיד, אנו נתייחס תמיד רק לאחד משני מקרים אלו בחישובים, וחוץ מאשר במקרים בהם נרצה להדגיש את ההבדל בין שני המקרים, אנו נשמיט את המציין התחתי "c" ונקבל משוואות התופסות עבור שניהם.

5.1.2 חישוב התנע הזוויתי והגדרת טנסור ההתמדה

הביטוי,

$$\mathbf{H} = \int_m \mathbf{R} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) dm \, ,$$

שיש לחשב על מנת לקבל את התנע הזוויתי, הוא בעל התכונה הבאה: מופיע בו הוקטור $\mathbf{R}$ (ולא $\mathbf{r}$). אזי, אם אנו מחשבים אותו באמצעות רכיביו במערכת הגוף, הרכיבים של הוקטור $\mathbf{R}$ נשארים קבועים בזמן התנועה ואינם תלויים במצב הגוף.

נחשב אם כן את האינטגרנד, על ידי שימוש בנוסחה למכפלה וקטורית משולשת (סעיף 4.4.1):

$$\mathbf{R} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) = (\mathbf{R} \cdot \mathbf{R})\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\omega})\mathbf{R} \, ,$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{R} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) &= (X^2 + Y^2 + Z^2)\omega_X \mathbf{I} - (X\omega_X + Y\omega_Y + Z\omega_Z)X\mathbf{I} + \\
&\quad + (X^2 + Y^2 + Z^2)\omega_Y \mathbf{J} - (X\omega_X + Y\omega_Y + Z\omega_Z)Y\mathbf{J} + \\
&\quad + (X^2 + Y^2 + Z^2)\omega_Z \mathbf{K} - (X\omega_X + Y\omega_Y + Z\omega_Z)Z\mathbf{K} \\
&= [(Y^2 + Z^2)\omega_X \quad -XY\omega_Y \quad -XZ\omega_Z]\mathbf{I} + \\
&\quad + [-YX\omega_X \quad +(X^2 + Z^2)\omega_Y \quad -YZ\omega_Z]\mathbf{J} + \\
&\quad + [-ZX\omega_X \quad -ZY\omega_Y \quad +(X^2 + Y^2)\omega_Z]\mathbf{K} \, .
\end{aligned}$$

בהציבנו ביטוי זה לתוך האינטגרל, אנו שמים לב שרכיבי $\boldsymbol{\omega}$ זהים עבור כל הנקודות בגוף, ולכן ניתן להוציא אותם מחוץ לאינטגרל. לפיכך,

$$\begin{aligned}
\mathbf{H} &= \int_m \mathbf{R} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) dm \\
&= \left[\int_m (Y^2 + Z^2) dm \; \omega_X \quad -\int_m XY dm \; \omega_Y \quad -\int_m XZ dm \; \omega_Z \right] \mathbf{I} + \\
&\quad + \left[-\int_m XY \omega_X \quad +\int_m (X^2 + Z^2) dm \; \omega_Y \quad -\int_m YZ dm \; \omega_Z \right] \mathbf{J} + \\
&\quad + \left[-\int_m ZX dm \; \omega_X \quad -\int_m ZY dm \; \omega_Y \quad +\int_m (X^2 + Y^2) dm \; \omega_Z \right] \mathbf{K} \, .
\end{aligned}$$

רכיבי התנע הזוויתי נתונים אם כן על ידי

$$
\begin{aligned}
H_X &= \int_m (Y^2+Z^2)dm\,\omega_X && -\int_m XYdm\,\omega_Y && -\int_m XZdm\,\omega_Z\\
H_Y &= -\int_m XYdm\,\omega_X && +\int_m (X^2+Z^2)dm\,\omega_Y && -\int_m YZdm\,\omega_Z\\
.\ H_Z &= -\int_m ZXdm\,\omega_X && -\int_m ZYdm\,\omega_Y && +\int_m (X^2+Y^2)dm\,\omega_Z
\end{aligned}
$$

ניתן לכתוב את שלושת המשוואות הללו על ידי שימוש בסימון מטריציוני באופן הבא

$$
,\ \begin{Bmatrix} H_X\\ H_Y\\ H_Z\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{XX} & I_{XY} & I_{XZ}\\ I_{YX} & I_{YY} & I_{YZ}\\ I_{ZX} & I_{ZY} & I_{ZZ}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\omega_X\\ \omega_Y\\ \omega_Z\end{Bmatrix}
$$

כאשר,

$$
.\ [\mathrm{I}] = \begin{bmatrix} I_{XX} & I_{XY} & I_{XZ}\\ I_{YX} & I_{YY} & I_{YZ}\\ I_{ZX} & I_{ZY} & I_{ZZ}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_m (Y^2+Z^2)dm & -\int_m XYdm & -\int_m XZdm\\ -\int_m XYdm & \int_m (X^2+Z^2)dm & -\int_m YZdm\\ -\int_m ZXdm & -\int_m ZYdm & +\int_m (X^2+Y^2)dm\end{bmatrix}
$$

המטריצה $[\mathrm{I}]$ נקראת **מטריצת ההתמדה (האינרציה)** או **טנסור ההתמדה (האינרציה)**. בשימוש טנסור ההתמדה ניתן לכתוב את הביטוי עבור התנע הזוויתי על ידי

$$
\begin{aligned}
H_X &= I_{XX}\omega_X && +I_{XY}\omega_Y && +I_{XZ}\omega_Z\\
H_Y &= I_{YX}\omega_X && +I_{YY}\omega_Y && +I_{YZ}\omega_Z\\
,\ H_Z &= I_{ZX}\omega_X && +I_{ZY}\omega_Y && +I_{ZZ}\omega_Z
\end{aligned}
$$

או בקיצור,

$$
.\{H\} = [\mathrm{I}]\{\omega\}
$$

אם נסמן על ידי I את ההעתקה הליניארית שהמטריצה שלה היא $[\mathrm{I}]$, אזי הביטוי עבור התנע הזוויתי יהיה

$$
\boxed{.\ \mathbf{H} = \mathrm{I}(\boldsymbol{\omega})}
$$

חשיבותו של ביטוי זה היא בכך, שטנסור ההתמדה מחושב בקואורדינטות הגוף, ואינו תלוי כלל בתנועה או במצב הגוף. ברגע שטנסור ההתמדה נתון עבור גוף קשיח, אנו יכולים לחשב את התנע הזוויתי לגבי כל אחד מהמקרים המוזכרים בסעיף 5.1.1, על ידי הצבת המהירות הזוויתית הרגעית במשוואה. (ברור שצריך להשתמש ברכיבי המהירות הזוויתית יחסית למצב הרגעי של מערכת הגוף הקשיח, ואף $\mathbf{H}$ יתקבל יחסית למערכת זו.)

5.1.3 תכונות שונות של טנסור ההתמדה

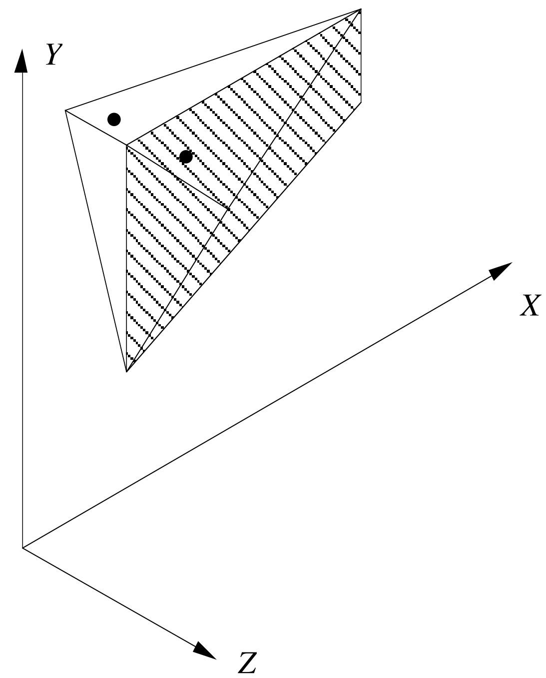
בסעיף זה נסכם תכונות שונות של טנסור ההתמדה ונראה את משמעותם לגבי חישובי התנע הזוויתי של גוף קשיח.

1. טנסור ההתמדה הוא אותו טנסור התמדה כפי שנלמד במקצוע "סטטיקה" מלבד סימן המינוס שמופיע לפני האיברים שמחוץ לאלכסון - מכפלות ההתמדה. סימן המינוס הוא לצורך נוחיות בלבד, בכדי שנוכל לכתוב את המשוואה $\mathbf{H} = \mathsf{I}(\boldsymbol{\omega})$. אנו מסתמכים על כך שהתלמיד למד ותירגל את הנושא בקורס "סטטיקה", ולא נדון בהרחבה, ולא נתרגל את חישובי אברי טנסור ההתמדה.

2. טנסור ההתמדה הוא סימטרי. כלומר, כפי שמשתמע מהביטויים עבור הרכיבים השונים במטריצה, אם אנו הופכים את סדר המציינים התחתיים, אנו מקבלים את אותו מספר. נפרט,

$$I_{YX} = I_{XY}\ ,\ \ I_{ZX} = I_{XZ}\ ,\ \ I_{YZ} = I_{ZY}\ .$$

3. בבעיה דו-מימדית, כל המהירויות והמקומות של החלקיקים נמצאים במישור אחד, מישור x, y , למשל. נובע מכך שהן המהירות הזוויתית, והן התנע הזוויתי, נמצאים בכיוון z הניצב. כלומר, במקרה זה ניתן לתאר את המהירות הזוויתית והתנע הזוויתי על ידי מספר אחד, היינו, ω_z עבור המהירות הזוויתית, ו-H_z עבור התנע הזוויתי. נובע מכך, כי התנע הזוויתי הוא פשוט כפולה של המהירות הזוויתית במספר - הרכיב I_{zz}. מסיבה זו, בעיות דו-מימדיות פשוטות בהרבה מבעיות תלת-מימדיות. על התלמיד שהתנסה בלימודים קודמים בבעיות דו-מימדיות בלבד, להזהר לבל ינסה להעביר למקרה הכללי מושגים פשטניים.



תרשים 3

4. אנו אומרים שלגוף יש מישור סימטריה, אם שני חלקי הגוף משני צידי המישור הם תמונת ראי זה של זה. כלומר, אם נבחר את מישור הסימטריה להיות מישור X, Y , אזי, עבור נקודת חומר כלשהי בגוף בעלת הקואורדינטות (X,Y,Z) , הנקודה $(X,Y,-Z)$ גם כן שייכת לגוף, וצפיפות המסה בשתי הנקודות זהה (ראה

תרשים 3 בו מישור הסימטריה מקווקו). בנקודה $(X,Y,-Z)$, האיבר מסוג $YZdm$ יהיה שווה בגודל, ובסימן הפוך, לזה עבור הנקודה (X,Y,Z) , ולכן באינטגרציה, תרומת שתי הנקודות תתקזזנה. בסופו של דבר, כאשר נעבור כך על כל נקודות הגוף, נקבל שהאינטגרל מתאפס. לפיכך,

$$I_{YZ} = 0 \,.$$

מסקנה זהה אפשר להסיק אם היינו לוקחים לדוגמה את $\mathbb{I}_{XZ}$. אנו מסיקים אם כן, שבמקרה שיש מישור סימטריה בגוף, מכפלות ההתמדה המכילות את הכיוון הניצב למישור הסימטריה, מתאפסות.

5. מהביטויים עבור רכיבי התנע הזוויתי, אנו יכולים לנסח את המשמעות הפיסיקלית של רכיבי טנסור ההתמדה לפי הדוגמה הבאה: הרכיב I_{XY} , מביע את התרומה של רכיב המהירות הזוויתית בכיוון Y , לרכיב התנע הזוויתי בכיוון X . נדון במקרה הפרטי בו $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{I}$. במקרה זה, הצבה במשוואות עבור התנע הזוויתי תיתן:

$$\begin{aligned} H_X &= \mathbf{H}\cdot\mathbf{I} = I_{XX} \\ H_Y &= \mathbf{H}\cdot\mathbf{J} = I_{YX} \\ H_Z &= \mathbf{H}\cdot\mathbf{K} = I_{ZX} \,. \end{aligned}$$

אם כעת נשתמש בעובדה כי במקרה הנדון $\mathbf{H} = \mathbb{I}(\boldsymbol{\omega}) = \mathbb{I}(\mathbf{I})$, נקבל

$$\begin{aligned} I_{XX} &= \mathbf{I}\cdot\mathbb{I}(\mathbf{I}) \\ I_{YX} &= \mathbf{J}\cdot\mathbb{I}(\mathbf{I}) \\ I_{ZX} &= \mathbf{K}\cdot\mathbb{I}(\mathbf{I}) \,. \end{aligned}$$

באופן דומה, על ידי בדיקת המקרה בו המהירות הזוויתית שווה $\mathbf{J}$ ואחר כך $\mathbf{K}$ נקבל

$$\begin{aligned} I_{XY} &= \mathbf{I}\cdot\mathbb{I}(\mathbf{J}) & \qquad I_{XZ} &= \mathbf{I}\cdot\mathbb{I}(\mathbf{K}) \\ I_{YY} &= \mathbf{J}\cdot\mathbb{I}(\mathbf{J}) & \qquad I_{YZ} &= \mathbf{J}\cdot\mathbb{I}(\mathbf{K}) \\ I_{ZY} &= \mathbf{K}\cdot\mathbb{I}(\mathbf{J}) & \qquad I_{ZZ} &= \mathbf{K}\cdot\mathbb{I}(\mathbf{K}) \,. \end{aligned}$$

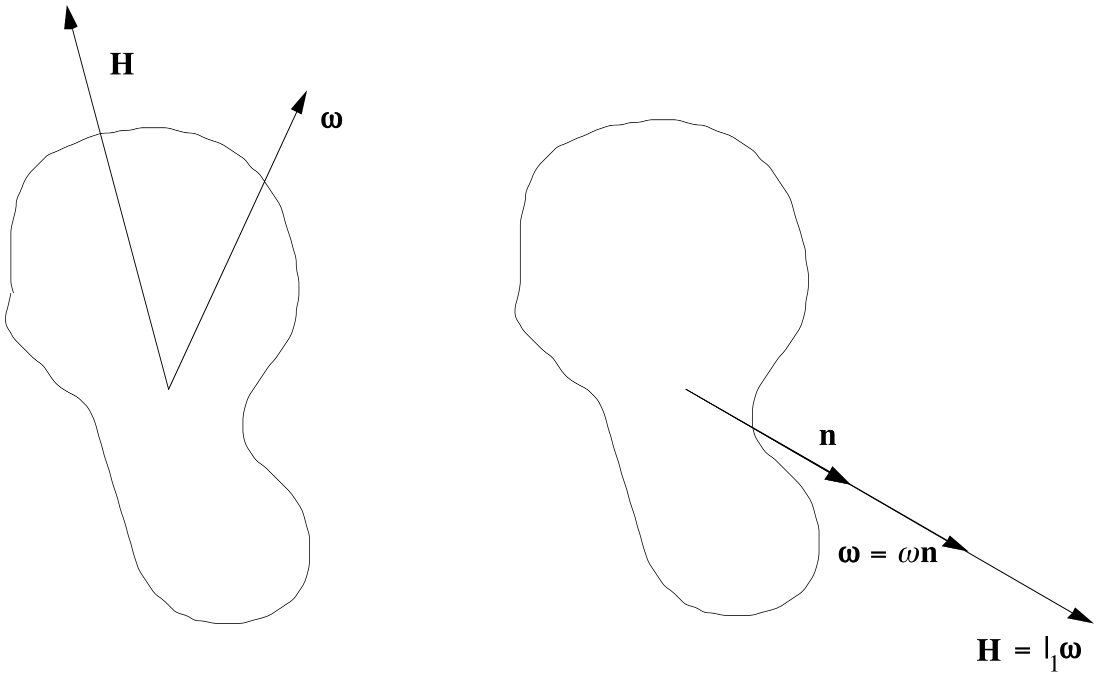
6. אנו שמים לב לעובדה שבניגוד למקרה הדו-מימדי, במקרה התלת-מימדי התנע הזוויתי והמהירות הזוויתית אינם בהכרח מקבילים. למשל, אם $\boldsymbol{\omega}$ היא בכיוון X , כך שרכיבי Y ו-Z שלה מתאפסים, התבוננות במשוואות עבור רכיבי התנע הזוויתי מראה כי, $H_Y = I_{YX}\omega_x$, $H_Z = I_{ZX}\omega_x$, ואינם מתאפסים. לכן, ניתן לשאול האם קיים כיוון כלשהו של $\boldsymbol{\omega}$, כך ש-$\mathbf{H}$ יהיה מקביל ל-$\boldsymbol{\omega}$. כיוון בעל תכונה כזו נקרא **כיוון ראשי**. נציין כיוון על ידי וקטור יחידה $\mathbf{n}$. אזי, אם $\mathbf{n}$ הוא כיוון ראשי, עבור $\boldsymbol{\omega}$ בכיוון $\mathbf{n}$, $\boldsymbol{\omega}$ ו-$\mathbf{H}$ מקבילים, ולכן קיים מספר $\mathbb{I}_1$, כך שמתקיים,

$$\mathbf{H} = I_1\boldsymbol{\omega}$$

(ראה תרשים 4). אם נשתמש בביטוי הכללי עבור $\mathbf{H}$, אזי התנאי הוא,

$$\mathbb{I}(\boldsymbol{\omega}) = I_1\boldsymbol{\omega} \,.$$

במונחים של אלגברה ליניארית, ניתן לאמר ש-$\mathbf{n}$ הוא כיוון ראשי אם הוא וקטור עצמי של טנסור ההתמדה, ובמקרה זה, המספר $\mathbb{I}_1$ הוא הערך העצמי המתאים לוקטור העצמי $\mathbf{n}$. כמובן שגם $\boldsymbol{\omega}$, או כל וקטור אחר המקביל ל-$\mathbf{n}$, הוא וקטור עצמי בעל אותו ערך עצמי.



התנע הזוויתי והמהירות הזוויתית עבור כיוון ראשי

התנע הזוויתי והמהירות הזוויתית בדרך כלל

תרשים 4

7. ניתן להוכיח על סמך הסימטריות של טנסור ההתמדה (תכונה 2 למעלה), כי לטנסור ההתמדה יש שלושה כיוונים ראשיים הניצבים זה לזה. כלומר, ישנם שלושה וקטורי יחידה $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$, במערכת הגוף הניצבים זה לזה, ושלושה מספרים I_1, I_2, I_3 , כך שמתקיים

$$\mathsf{I}(\omega_1\mathbf{n}_1) = I_1\omega_1\mathbf{n}_1$$
$$\mathsf{I}(\omega_2\mathbf{n}_2) = I_2\omega_2\mathbf{n}_2$$
$$.\ \mathsf{I}(\omega_3\mathbf{n}_3) = I_3\omega_3\mathbf{n}_3$$

אנו יכולים אם כן לבחור תמיד את מערכת הגוף הקשיח כך שציריה יהיו בשלושת הכיוונים הראשיים. מערכת כזו נקראת **מערכת צירים ראשית**. כאמור, ניתן למצוא את מערכת הצירים הראשית על ידי פתרון בעית הערך העצמי עבור טנסור ההתמדה. נניח שמערכת הצירים X, Y, Z היא מערכת צירים ראשית. במערכת צירים כזו וקטורי היחידה $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$ הם הוקטורים $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ ולכן

$$\mathsf{I}(\omega_X\mathbf{I}) = I_1\omega_X\mathbf{I}$$
$$\mathsf{I}(\omega_Y\mathbf{J}) = I_2\omega_Y\mathbf{J}$$
$$.\ \mathsf{I}(\omega_Z\mathbf{K}) = I_3\omega_Z\mathbf{K}$$

לכן במערכת צירים ראשית

$$H_X = I_1\omega_X$$
$$H_Y = I_2\omega_Y$$
$$,\ H_Z = I_3\omega_Z$$

ובהשוואה עם הכלל לחישוב תנע זוויתי

$$H_X = I_{XX}\omega_X + I_{XY}\omega_Y + I_{XZ}\omega_Z = I_1\omega_X$$
$$H_Y = I_{YX}\omega_X + I_{YY}\omega_Y + I_{YZ}\omega_Z = I_2\omega_Y$$
$$.\ H_Z = I_{ZX}\omega_X + I_{ZY}\omega_Y + I_{ZZ}\omega_Z = I_3\omega_Z$$

מכיוון שמשוואות אלו חייבות להתקיים עבור כל וקטור $\boldsymbol{\omega}$, ורכיביו הם שרירותיים, נובע מהן כי

$$I_{XX} = I_1\ , I_{YY} = I_2\ , I_{ZZ} = I_3\ ,$$
$$, I_{XY} = I_{YX} = I_{XZ} = I_{ZX} = I_{YZ} = I_{ZY} = 0$$

כך שבמערכת צירים ראשית

$$.\ [\mathrm{I}] = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}$$

אנו מסיקים אם כן כי תמיד ניתן למצוא מערכת צירים הצמודה לגוף בה מכפלות ההתמדה מתאפסות.

8. **משפט שטיינר** (משפט הצירים המקבילים) מקשר את רכיבי ההתמדה במערכת צירים X, Y, Z , עם מערכת צירים מקבילה לה, אשר ראשיתה נמצאת במרכז המסה של הגוף. אם X_c, Y_c, Z_c מסמנים את הקואורדינטות של מרכז המסה יחסית למערכת X, Y, Z , ורכיבי ההתמדה יחסית למערכת שראשיתה במרכז המסה, מסומנים על ידי מציין תחתי "c" , אזי הקשר בין רכיבי ההתמדה נתון על ידי

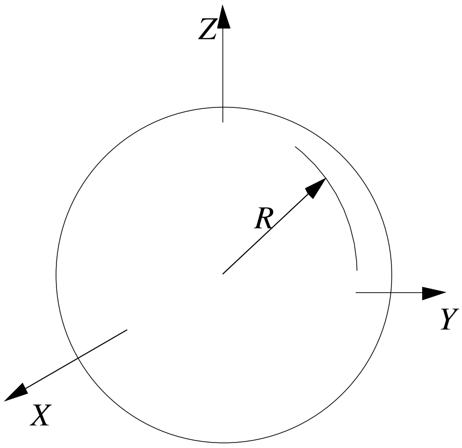
$$I_{XX} = I_{X_cX_c} + m(Y_c^2 + Z_c^2)$$
$$I_{YY} = I_{Y_cY_c} + m(X_c^2 + Z_c^2)$$
$$I_{ZZ} = I_{Z_cZ_c} + m(X_c^2 + Y_c^2)$$
$$I_{XY} = I_{X_cY_c} - mX_cY_c$$
$$I_{XZ} = I_{X_cZ_c} - mX_cZ_c$$
$$.\ I_{YZ} = I_{Y_cZ_c} - mY_cZ_c$$

(שוב מופיע סימן המינוס בניגוד לכללים שנלמדו בסטטיקה בגלל שיטת הסימון שבחרנו.)

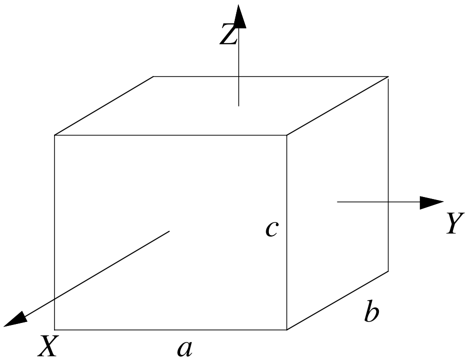
רכיבי ההתמדה עבור מספר גופים הומוגניים פשוטים מופיעים בטבלה בעמוד הבא.

רכיבי ההתמדה עבור מספר גופים הומוגניים פשוטים

מערכות הצירים ראשיות

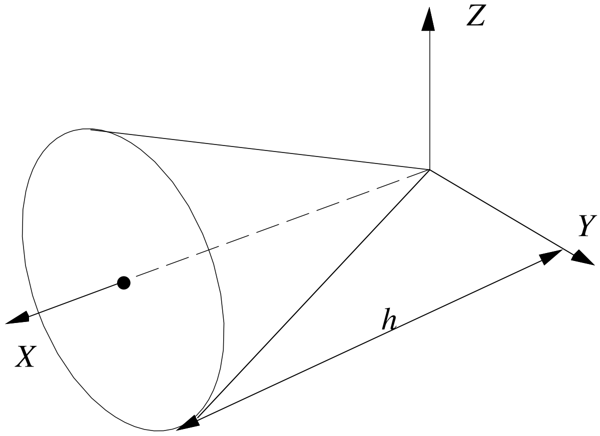


$$I_{XX} = I_{YY} = I_{ZZ} = \frac{2}{5} mR^2$$



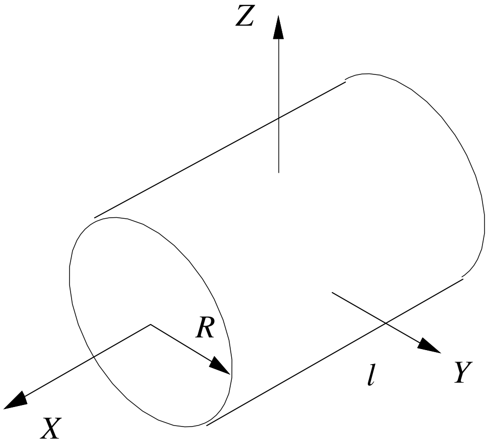
$$I_{XX} = \frac{1}{12} m(a^2 + c^2)$$

$$I_{YY} = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2)$$



$$I_{XX} = \frac{3}{10} mR^2$$

$$I_{YY} = \frac{3}{20} mR^2 + \frac{3}{5} mh^2$$

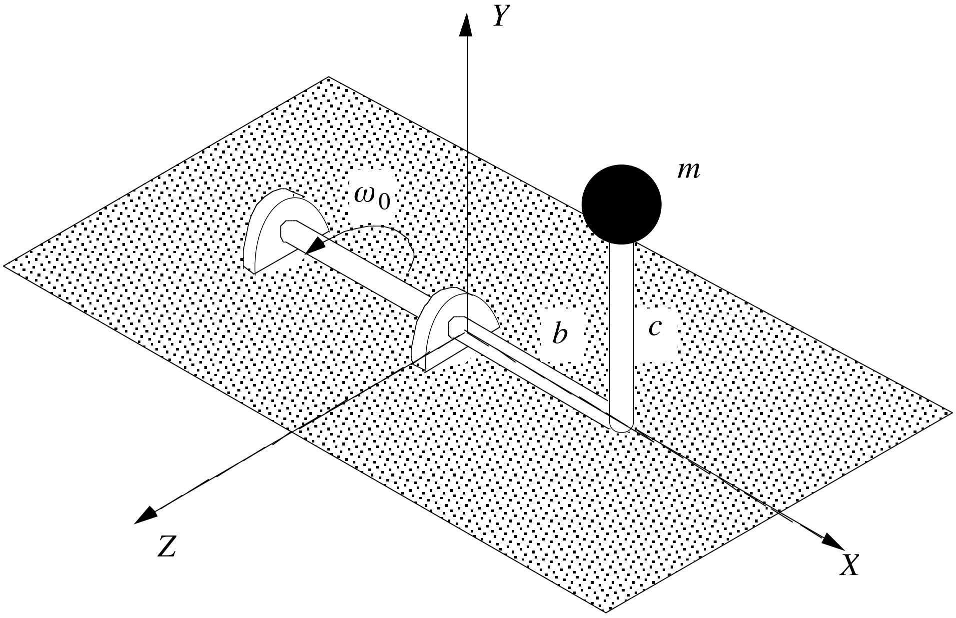


$$I_{XX} = \frac{1}{2} mR^2$$

$$I_{YY} = \frac{1}{4} mR^2 + \frac{1}{12} ml^2$$

5.1.4 דוגמה

בכדי לראות את תפקידן של מכפלות ההתמדה בצורה הפשוטה ביותר, נחשב את התנע הזוויתי של המערכת המתוארת בתרשים 5. המסה m הינה מסה נקודתית והמוטות חסרי מסה.



תרשים 5

פתרון: מכיון שהמסה נקודתית, אין לנו צורך לחשב את האינטגרלים עבור רכיבי ההתמדה ומתקבל

$$[\mathrm{I}] = \begin{bmatrix} mc^2 & -mbc & 0 \\ -mbc & mb^2 & 0 \\ 0 & 0 & m(b^2+c^2) \end{bmatrix} .$$

$\boldsymbol{\omega} = \omega_0\mathbf{I}$, ולכן,

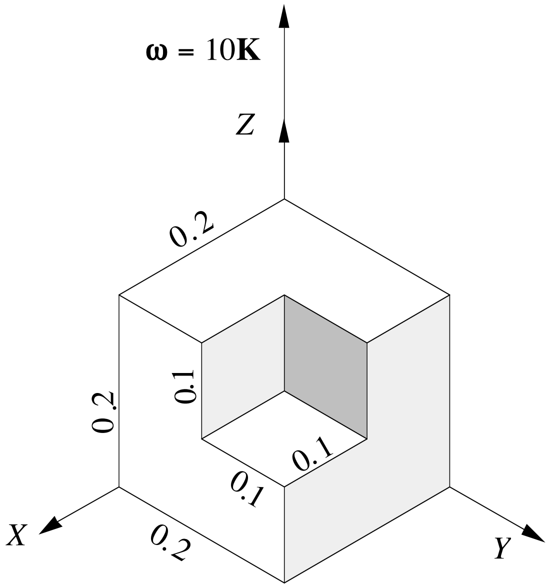
$$\{H\} = [\mathrm{I}]\{\omega\} = \begin{bmatrix} mc^2 & -mbc & 0 \\ -mbc & mb^2 & 0 \\ 0 & 0 & m(b^2+c^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \omega_0 mc^2 \\ -\omega_0 mbc \\ 0 \end{Bmatrix} .$$

אנו רואים שאלמלא האיבר $I_{YX} = -mbc$, רכיב התנע הזוויתי בכיוון Y לא היה מתקבל. בכדי לבדוק שזו אכן התוצאה הנכונה, אנו משתמשים בעובדה שמדובר בחלקיק, כך ש-

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) \\ &= m(b\mathbf{I} + c\mathbf{J}) \times [(\omega_0\mathbf{I}) \times (b\mathbf{I} + c\mathbf{J}) \\ &= \omega_0 mc^2\mathbf{I} - \omega_0 mbc\mathbf{J} \end{aligned} .$$

דוגמה 5.1.5

מהו התנע הזוויתי של הגוף המתואר בתרשים 6 (כל המידות נתונות במטרים) אשר סובב סביב הציר Z במהירות זוויתית של 10 rad/s . מסת הגוף הינה 14 kg וצפיפות המסה אחידה.



תרשים 6

פתרון: כל אשר עלינו לעשות על מנת לחשב את התנע הזוויתי, הוא למצוא את טנסור ההתמדה עבור הגוף. לצורך זה, נחשב את הרכיבים השונים עבור הקוביה המלאה, ונחסיר את הרכיבים המתאימים עבור המגרעת בצורת קוביה (הדבר נובע כמובן מהכללים עבור אינטגרציה במרחב). עבור כל קוביה נצטרך כמובן להשתמש במשפט שטיינר (תכונה 8 בסעיף 5.1.3):

$$\begin{aligned}
I_{XX} &= I_{X_cX_c} + m(Y_c^2 + Z_c^2) \\
I_{YY} &= I_{Y_cY_c} + m(X_c^2 + Z_c^2) \\
I_{ZZ} &= I_{Z_cZ_c} + m(X_c^2 + Y_c^2) \\
I_{XY} &= I_{X_cY_c} - mX_cY_c \\
I_{XZ} &= I_{X_cZ_c} - mX_cZ_c \\
I_{YZ} &= I_{Y_cZ_c} - mY_cZ_c \, .
\end{aligned}$$

נפח הגוף הוא $V = 0.2^3 - 0.1^3 = 0.007 \text{ m}^3$, ולכן צפיפות המסה שלו היא

$$\rho = \frac{14}{0.007} = 2000 \text{ kg/m}^3 \, .$$

מסת הקוביה המלאה תהיה לכן $m_1 = (2000)(0.2)^3 = 16 \text{ kg}$, ומסת החלק שעלינו להוריד על מנת לקבל את המגרעת הוא $m_2 = 2 \text{ kg}$.

עבור קוביה בצלע b (ראה טבלה):

$$I_{X_cX_c} = I_{Y_cY_c} = I_{Z_cZ_c} = \tfrac{1}{12} m2b^2 = \tfrac{1}{6} mb^2$$
$$, I_{X_cY_c} = I_{Y_cZ_c} = I_{Z_cX_c} = 0$$

ולכן בשימוש משפט שטיינר

$$\begin{aligned}
I_{XX} &= \tfrac{1}{6} mb^2 + m(Y_c^2 + Z_c^2) \\
I_{YY} &= \tfrac{1}{6} mb^2 + m(X_c^2 + Z_c^2) \\
I_{ZZ} &= \tfrac{1}{6} mb^2 + m(X_c^2 + Y_c^2) \\
I_{XY} &= -mX_cY_c \\
I_{XZ} &= -mX_cZ_c \\
.\, I_{YZ} &= -mY_cZ_c
\end{aligned}$$

עבור הקוביה המלאה, $X_c = Y_c = Z_c = 0.1$ m , $b = 0.2$, ולכן

$$.\,[\mathrm{I}_1] = \begin{bmatrix} 0.427 & -0.16 & -0.16 \\ -0.16 & 0.427 & -0.16 \\ -0.16 & -0.16 & 0.427 \end{bmatrix} \mathrm{kgm}^2$$

עבור החלק אותו עלינו להוריד מהקוביה המלאה על מנת לקבל את הגוף הנתון: $X_c = Y_c = Z_c = 0.15$ m , $b = 0.1$, ולכן

$$.\,[\mathrm{I}_2] = \begin{bmatrix} 0.093 & -0.045 & -0.045 \\ -0.045 & 0.093 & -0.045 \\ -0.045 & -0.045 & 0.093 \end{bmatrix} \mathrm{kgm}^2$$

נחסיר את שתי המטריצות על מנת לקבל

$$.\,[\mathrm{I}] = \begin{bmatrix} 0.334 & -0.115 & -0.115 \\ -0.115 & 0.334 & -0.115 \\ -0.115 & -0.115 & 0.334 \end{bmatrix} \mathrm{kgm}^2$$

לקבלת רכיבי $\mathbf{H}$, נכפול את המטריצה בוקטור הרכיבים של $\boldsymbol{\omega}$

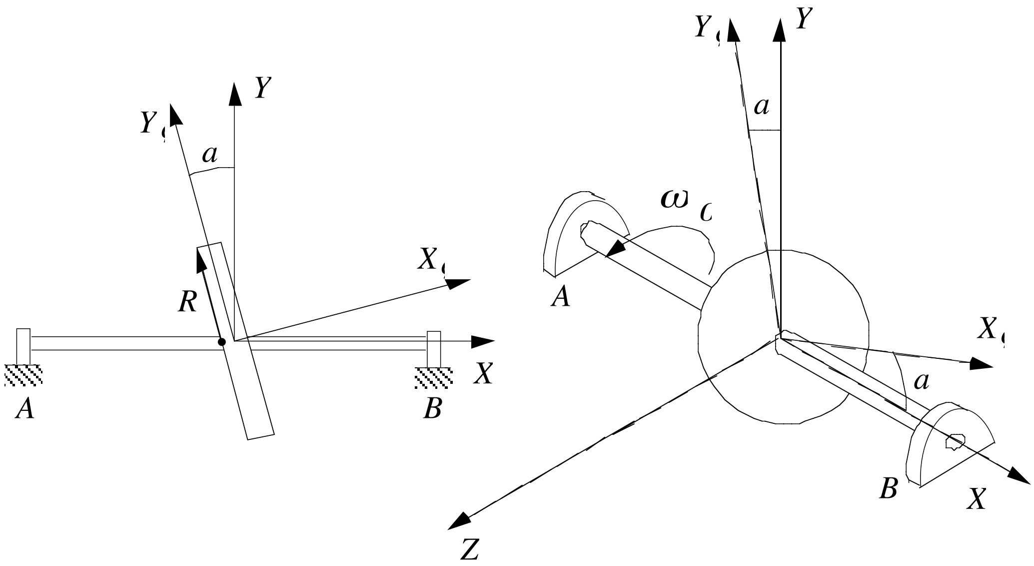
$$,\{H\} = \begin{Bmatrix} H_X \\ H_Y \\ H_Z \end{Bmatrix} = [\mathrm{I}]\{\omega\} = \begin{bmatrix} 0.334 & -0.115 & -0.115 \\ -0.115 & 0.334 & -0.115 \\ -0.115 & -0.115 & 0.334 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.15 \\ -1.15 \\ 3.34 \end{Bmatrix} \mathrm{kgm}^2/\mathrm{s}$$

כלומר,

$$.\,\mathbf{H} = -1.15\mathbf{I} - 1.15\mathbf{J} + 3.34\mathbf{K}\ \mathrm{kgm}^2/\mathrm{s}$$

דוגמה 5.1.6

חשב עבור הדיסקה המתוארת בתרשים 7 , אשר סובבת במהירות קבועה סביב ציר המחובר בזווית α לצירה, את התנע הזוויתי, ואת רכיבי טנסור ההתמדה I_{XX}, I_{XY}, I_{XZ} יחסית לצירים X, Y, Z המתוארים בתרשים.



תרשים 7

פתרון: מערכת הצירים X', Y', Z' המתוארת בתרשים הינה מערכת צירים ראשית, ועבורה (ראה טבלה עבור גליל באורך אפס)

$$I_{X'X'} = \tfrac{1}{2} mR^2 \ , \ I_{Y'Y'} = I_{Z'Z'} = \tfrac{1}{4} mR^2$$

את המהירות הזוויתית $\boldsymbol{\omega} = \omega_0 \mathbf{I}$, ניתן גם לבטא באמצעות רכיביה יחסית למערכת הצירים הראשית בצורה

$$, \boldsymbol{\omega} = \omega_0 \cos\alpha \mathbf{I}' - \omega_0 \sin\alpha \mathbf{J}'$$

כאשר $\mathbf{I}', \mathbf{J}'$ הם כמובן וקטורי היחידה במערכת X', Y', Z' . ניתן אם כן לחשב את התנע הזוויתי באמצעות רכיביו במערכת הצירים הראשית

$$,\begin{Bmatrix} H_{X'} \\ H_{Y'} \\ H_{Z'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} mR^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_0 \cos\alpha \\ -\omega_0 \sin\alpha \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$,\begin{Bmatrix} H_{X'} \\ H_{Y'} \\ H_{Z'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} mR^2\omega_0 \cos\alpha \\ -\frac{1}{4} mR^2\omega_0 \sin\alpha \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$.\ \mathbf{H} = mR^2\omega_0(\tfrac{1}{2}\cos\alpha\mathbf{I}' - \tfrac{1}{4}\sin\alpha\mathbf{J}')$$

למציאת רכיבי טנסור ההתמדה הדרושים, נשתמש במשוואות שקיבלנו בתכונה 5 ברשימת התכונות של טנסור ההתמדה (סעיף 5.1.3)

$$\begin{aligned} I_{XX} &= \mathbf{I}\cdot \mathsf{I}(\mathbf{I}) \\ I_{YX} &= \mathbf{J}\cdot \mathsf{I}(\mathbf{I}) \\ I_{ZX} &= \mathbf{K}\cdot \mathsf{I}(\mathbf{I}) \end{aligned}$$

(כזכור, סדר המציינים אינו חשוב). את כל החישובים נעשה במערכת X', Y', Z' . לפיכך,

$$,\ \mathbf{I} = \cos\alpha\mathbf{I}' - \sin\alpha\mathbf{J}',\ \ \mathbf{J} = \sin\alpha\mathbf{I}' + \cos\alpha\mathbf{J}',\ \ \mathbf{K} = \mathbf{K}'$$

ורכיבי טנסור ההתמדה הם אלה הרשומים למעלה. לכן,

$$\{\mathsf{I}(\mathbf{I})\} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}mR^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos\alpha \\ -\sin\alpha \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}mR^2\cos\alpha \\ -\frac{1}{4}mR^2\sin\alpha \\ 0 \end{Bmatrix},$$

$$,\ \mathsf{I}(\mathbf{I}) = mR^2(\tfrac{1}{2}\cos\alpha\mathbf{I}' - \tfrac{1}{4}\sin\alpha\mathbf{J}')$$

ומתקבל,

$$\begin{aligned} I_{XX} &= \mathbf{I}\cdot\mathsf{I}(\mathbf{I}) = (\cos\alpha\mathbf{I}' - \sin\alpha\mathbf{J}')\cdot mR^2(\tfrac{1}{2}\cos\alpha\mathbf{I}' - \tfrac{1}{4}\sin\alpha\mathbf{J}') = mR^2(\tfrac{1}{2}\cos^2\alpha + \tfrac{1}{4}\sin^2\alpha) \\ .\ I_{YX} &= \mathbf{J}\cdot\mathsf{I}(\mathbf{I}) = (\sin\alpha\mathbf{I}' + \cos\alpha\mathbf{J}')\cdot mR^2(\tfrac{1}{2}\cos\alpha\mathbf{I}' - \tfrac{1}{4}\sin\alpha\mathbf{J}') = \tfrac{1}{4}mR^2\sin\alpha\cos\alpha \\ I_{ZX} &= \mathbf{K}\cdot\mathsf{I}(\mathbf{I}) = \mathbf{K}'\cdot mR^2(\tfrac{1}{2}\cos\alpha\mathbf{I}' - \tfrac{1}{4}\sin\alpha\mathbf{J}') = 0 \end{aligned}$$

כמובן שבדרך זו ניתן להמשיך ולמצוא את כל רכיבי ההתמדה יחסית למערכת X, Y, Z .

5.2.1 הביטוי שיש לחשב לקבלת האנרגיה הקינטית עבור ראשית נייחת ומערכת מרכז המסה

סעיף זה מקביל לסעיף 5.1.1. אנו משווים בו את הביטויים שיש לקבל לצורך חישוב האנרגיה הקינטית של גוף קשיח, עבור שני המקרים בהם דנו באותו סעיף. כפי שרשמנו בסעיף 5.0.2, האנרגיה הקינטית של גוף קשיח נתונה על ידי

$$T = \tfrac{1}{2}\int_m \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}dm .$$

אם הגוף הקשיח סובב סביב נקודה קבועה, ניתן לקחת את הנקודה הקבועה כראשית הצירים של מערכת הגוף, ואז, $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{R}} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}$ עבור חלקיק כלשהו שרדיוס הוקטור אליו הוא $\mathbf{R}$. בהצבה בנוסחת האנרגיה הקינטית נקבל

$$T = \tfrac{1}{2}\int_m (\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R})\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R})dm .$$

מאידך, אנו יכולים לחשב את האנרגיה הקינטית על ידי

$$T = \tfrac{1}{2}mv_c^2 + T_c ,$$

כאשר,

$$T_c = \tfrac{1}{2}\int_m \mathbf{v}'\cdot\mathbf{v}'dm ,$$

ו-$\mathbf{v}'$ היא המהירות יחסית למרכז המסה. במקרה זה נוח לבחור את ראשית הצירים של מערכת הגוף במרכז המסה, ואז $\mathbf{v}' = \dot{\mathbf{R}} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}$,

$$T_c = \tfrac{1}{2}\int_m (\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R})\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R})dm .$$

כלומר, בכדי לקבל את האנרגיה הקינטית של גוף קשיח באחד משני המקרים הנדונים, יש לבצע חישוב זהה. כמו שנהגנו בעקבות סעיף 5.1.1 אנו לא נציין בדרך כלל בהמשך באיזה משני המקרים אנו עוסקים, אלא אם כן יהיה צורך להדגיש זאת. אל הביטוי

$$\tfrac{1}{2}\int_m (\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R})\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R})dm$$

נתייחס כאל **האנרגיה הקינטית הסיבובית** של הגוף.

5.2.2 המכפלה הסקלרית המשולשת

עבור שלושה וקטורים $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$, המכפלה הסקלרית המשולשת מוגדרת על ידי,

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) ,$$

והיא מביעה מבחינה גיאומטרית את נפח המקבילון התחום על ידי שלושה וקטורים אלו. אם נרשום את הביטוי עבור המכפלה הסקלרית המשולשת, באמצעות רכיבי הוקטורים במערכת צירים כלשהי, נקבל

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = (u_x\mathbf{i}+u_y\mathbf{j}+u_z\mathbf{k})\cdot\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ v_x & v_y & v_z\\ w_x & w_y & w_z\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}u_x & u_y & u_z\\ v_x & v_y & v_z\\ w_x & w_y & w_z\end{vmatrix} .$$

מתכונות הדטרמיננט נובע כי

$$\begin{vmatrix}u_x & u_y & u_z\\ v_x & v_y & v_z\\ w_x & w_y & w_z\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}w_x & w_y & w_z\\ u_x & u_y & u_z\\ v_x & v_y & v_z\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}v_x & v_y & v_z\\ w_x & w_y & w_z\\ u_x & u_y & u_z\end{vmatrix},$$

ועל כן אנו מסיקים כי

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \mathbf{w}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = \mathbf{v}\cdot(\mathbf{w}\times\mathbf{u}) .$$

5.2.3 חישוב האנרגיה הקינטית של גוף קשיח בעזרת טנסור ההתמדה

נשתמש בזהות

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{w}) = \mathbf{v}\cdot(\mathbf{w}\times\mathbf{u}) ,$$

שקיבלנו בסעיף הקודם, עבור האינטגרנד בביטוי לחישוב האנרגיה הקינטית הסיבובית:

$$\tfrac{1}{2}\int_m (\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R})\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R})dm .$$

במקום $\mathbf{u}$ נציב $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}$, במקום $\mathbf{v}$ נציב $\boldsymbol{\omega}$, ובמקום $\mathbf{w}$ נציב $\mathbf{R}$. נקבל

$$\int_m (\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R})\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R})dm = \int_m \boldsymbol{\omega}\cdot[\mathbf{R}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R})]dm$$

$$= \boldsymbol{\omega}\cdot\int_m [\mathbf{R}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R})]dm ,$$

כאשר בשורה השניה, השתמשנו בכך שהמהירות הזוויתית כמובן אחידה בכל נקודות החומר בגוף. מהשוואת האינטגרל האחרון, עם זה המופיע בסעיף 5.1.2 נווכח כי הוא פשוט התנע הזוויתי המתאים. לכן,

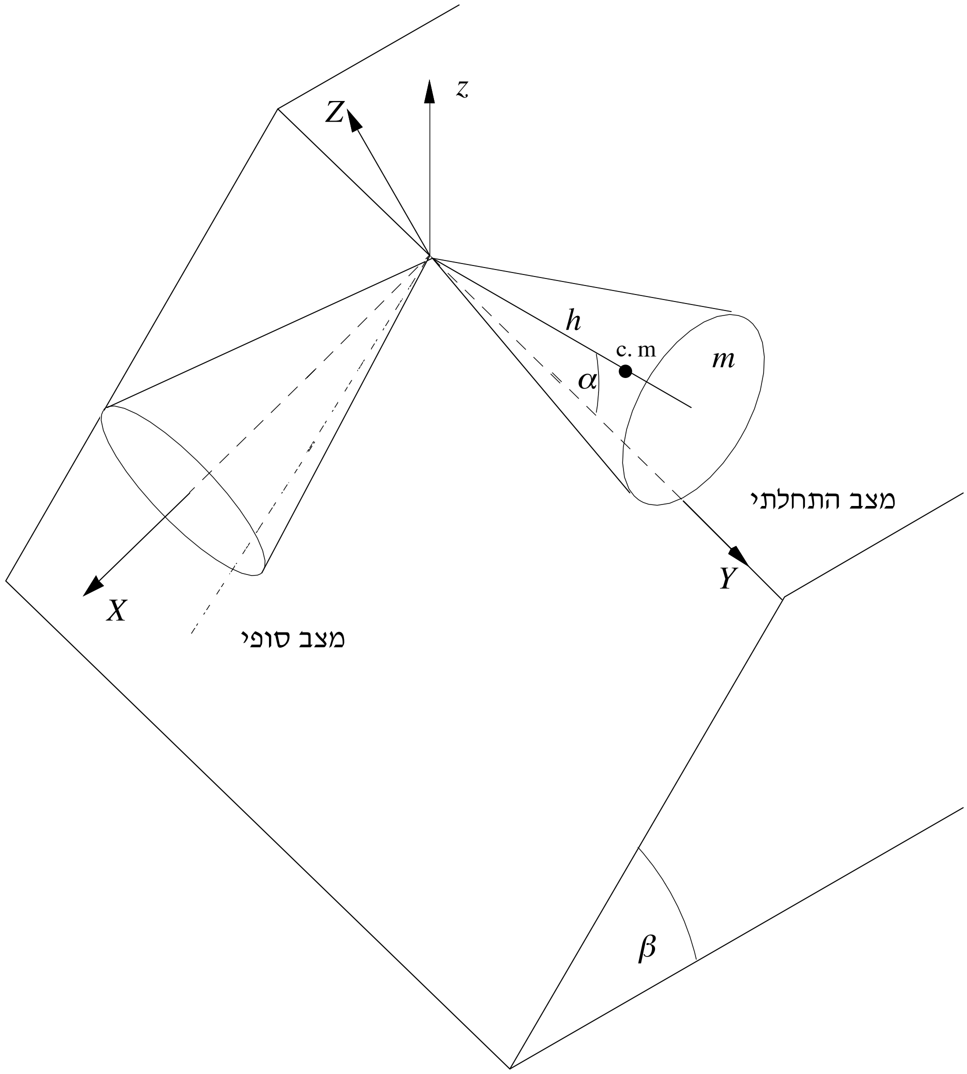
$$\int_m (\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R})\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R})dm = \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{H} = \boldsymbol{\omega}\cdot\mathsf{I}(\boldsymbol{\omega}) .$$

אנו מסיקים אם כן כי

$$\boxed{T = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{H} = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathsf{I}(\boldsymbol{\omega}) ,}$$

או בשימוש טנסור האינרציה יחסית למערכת שראשיתה במרכז המסה,

$$\boxed{T = \tfrac{1}{2}mv_c^2 + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{H}_c = \tfrac{1}{2}mv_c^2 + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathsf{I}_c(\boldsymbol{\omega}) .}$$



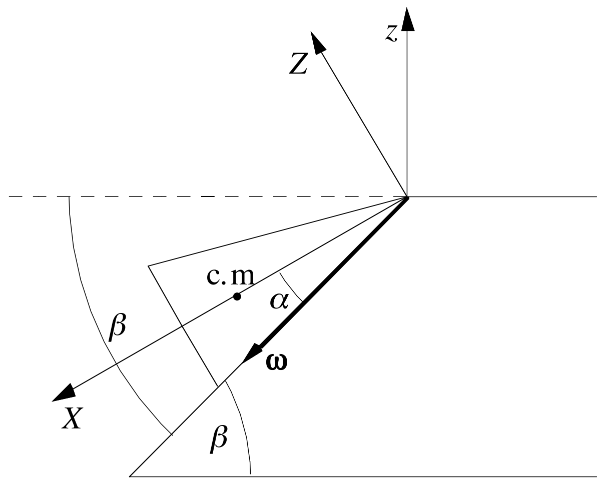
תרשים 8

דוגמה 5.2.4

החרוט המתואר בתרשים 8 נמצא במנוחה על שפת מישור משופע, כך שהקו היוצר שלו אופקי. כתוצאה מהפרעה קטנה, החרוט מתחיל להתגלגל במורד המישור. מצא את המהירות הזוויתית של החרוט ואת מהירות הנקודה הנמצאת במרכז הבסיס, לאחר שצירו סב 90°, והוא נמצא במורד המישור. מסת החרוט m, גובהו h והזווית בין צירו לקו היוצר היא α.

פתרון: העיקרון לפיו נפתור את הדוגמה הוא שמור האנרגיה. עבודת כוח הכובד תהיה שווה לשינוי באנרגיה הקינטית. כזכור מסעיף 5.0.2 וסעיף 3.3.6, עבודת כוח הכובד שווה לשינוי באנרגיה הפוטנציאלית של מרכז המסה. נחשב אם כן את הבדלי הגבהים בין מצבו של מרכז המסה בהתחלה ובסוף. מרחקו של מרכז המסה של חרוט מקודקדו הוא $\frac{3}{4}h$, ולכן במצב ההתחלתי, $z_1 = \frac{3}{4}h\sin\alpha$. במצב הסופי (ראה תרשים 9), $z_2 = -\frac{3}{4}h\sin(\beta-\alpha)$, ולכן

$$U_1 - U_2 = mgz_1 - mgz_2 = \tfrac{3}{4}mgh[\sin\alpha + \sin(\beta-\alpha)].$$



תרשים 9

האנרגיה הקינטית במצב הראשוני מתאפסת כמובן, ולצורך חישוב האנרגיה הקינטית במצב הסופי, נבחר את מערכת הצירים הראשית X, Y, Z , המתוארת בתרשימים. כזכור, וקטור המהירות הזוויתית הוא לאורך הישר שמכיל נקודות שמהירותן מתאפסות (ראה דוגמה 4.2.4), ולכן $\boldsymbol{\omega}$ נמצאת בכיוון המתואר בתרשים 9. במערכת הצירים שבחרנו

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\cos\alpha\mathbf{I} - \omega\sin\alpha\mathbf{K}\ .$$

טנסור ההתמדה במערכת הצירים הראשית שנבחרה הוא (ראה טבלה)

$$[\mathrm{I}] = \begin{bmatrix} \frac{3}{10}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{20}mR^2 + \frac{3}{5}mh^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{20}mR^2 + \frac{3}{5}mh^2 \end{bmatrix},$$

$$[\mathrm{I}] = \begin{bmatrix} \frac{3}{10}mh^2\tan^2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & mh^2\left(\frac{3}{20}\tan^2\alpha + \frac{3}{5}\right) & 0 \\ 0 & 0 & mh^2\left(\frac{3}{20}\tan^2\alpha + \frac{3}{5}\right) \end{bmatrix},$$

כאשר בשורה השניה השתמשנו בקשר, $R = h\tan\alpha$ עבור רדיוס הבסיס. לכן,

$$\{H\} = [\mathrm{I}]\{\omega\} = \begin{bmatrix} \frac{3}{10}mh^2\tan^2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & mh^2\left(\frac{3}{20}\tan^2\alpha + \frac{3}{5}\right) & 0 \\ 0 & 0 & mh^2\left(\frac{3}{20}\tan^2\alpha + \frac{3}{5}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega\cos\alpha \\ 0 \\ -\omega\sin\alpha \end{Bmatrix},$$

$$\{H\} = \begin{Bmatrix} \frac{3}{10}mh^2\omega\cos\alpha\tan^2\alpha \\ 0 \\ -mh^2\omega\sin\alpha\left(\frac{3}{20}\tan^2\alpha + \frac{3}{5}\right) \end{Bmatrix}.$$

כעת האנרגיה הקינטית מתקבלת על ידי

$$T = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{H} = \tfrac{1}{2}(\omega\cos\alpha\mathbf{I} - \omega\sin\alpha\mathbf{K})\cdot\left[\tfrac{3}{10}mh^2\omega\cos\alpha\tan^2\alpha\mathbf{I} - mh^2\omega\sin\alpha\left(\tfrac{3}{20}\tan^2\alpha + \tfrac{3}{5}\right)\mathbf{K}\right],$$

$$T = \tfrac{3}{40}\omega^2 mh^2\sin^2\alpha\left(6+\tan^2\alpha\right).$$

על ידי השוואה עם השינוי באנרגיה הפוטנציאלית: $T = U_1 - U_2$, ומתקבל

$$\omega = \left\{\frac{10g\left[\sin\alpha + \sin(\beta-\alpha)\right]}{h\sin^2\alpha(6+\tan^2\alpha)}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

מהירות מרכז הבסיס תחושב על ידי $\dot{\mathbf{R}} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}$ כאשר $\mathbf{R} = h\mathbf{I}$:

$$\dot{\mathbf{R}} = -\left\{\frac{10g\left[\sin\alpha + \sin(\beta-\alpha)\right]}{h\sin^2\alpha(6+\tan^2\alpha)}\right\}^{\frac{1}{2}} h\sin\alpha\mathbf{J}.$$

שים לב שבחישובי אנרגיה מהסוג המודגם כאן, מגמת המהירות הזוויתית (או המהירות הקווית) נקבעת מתוך שיקולים פיסיקליים, ואינה מתקבלת מפתרון המשוואות (שנותנות את ω^2).

5.3 משוואות התנועה של גוף קשיח

5.3.1 הקדמה

כזכור מסעיף 5.0.2 תנועתו של גוף קשיח נשלטת על ידי משוואות התנועה

$$\Sigma\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}_c \ , \quad \Sigma\mathbf{M} = \dot{\mathbf{H}} \ .$$

המשוואה הימנית היא משוואת התנע הזוויתי, וניתן להחליף אותה במשוואה השקולה $\Sigma\mathbf{M}_c = \dot{\mathbf{H}}_c$, שהיא משוואת התנע הזוויתי יחסית למרכז המסה. המשוואה השמאלית היא משוואת התנע הקווי של הגוף הקשיח. בסך הכל יש לנו אם כן שש משוואות סקלריות. מספר המשוואות תואם את מספר דרגות החופש שיש לגוף קשיח, שגם הוא שש, ולכן, באופן עקרוני, ניתן לחשב את תנועתו של גוף קשיח על סמך הכוחות החיצוניים והמומנטים הפועלים עליו. שים לב שבעוד משוואות אלו שפותחו במקור עבור מערכת חלקיקים, לא הגדירו את התנועה של חלקיקי המערכת באופן כללי (כי הרי מספר דרגות החופש במערכת חלקיקים תלוי במספר החלקיקים וזה אינו מוגבל), ההנחה שהגוף קשיח, מאפשרת התאמה בין מספר המשוואות למספר דרגות החופש של הגוף. משוואות אלו מחליפות את משוואות שווי המשקל $\Sigma\mathbf{F} = \mathbf{0}$, $\Sigma\mathbf{M} = \mathbf{0}$, ואכן האגפים השמאליים של המשוואות יחושבו בדיוק כמו בסטטיקה. כדי להשתמש במשוואות, נזדקק לחישוב תאוצת מרכז המסה, וזאת נעשה על סמך הכללים שנלמדו בפרק העוסק בקינמטיקה של גוף קשיח. כמו-כן נזדקק לחישוב נגזרת התנע הזוויתי. חישוב נגזרת התנע הזוויתי, היא החלק הקשה והחדש ביישום משוואות התנועה, והוא ידון בשלושת הסעיפים הבאים ובדוגמאות שאחריהם. חישוב זה מייחד את הדינמיקה של גוף קשיח מהדינמיקה של חלקיק.

5.3.2 חישוב נגזרת התנע הזוויתי של גוף קשיח

כפי שראינו בסעיף 5.1.2 התנע הזוויתי של גוף קשיח נתון על ידי המשוואה

$$\mathbf{H} = \mathsf{I}(\boldsymbol{\omega}) \ ,$$

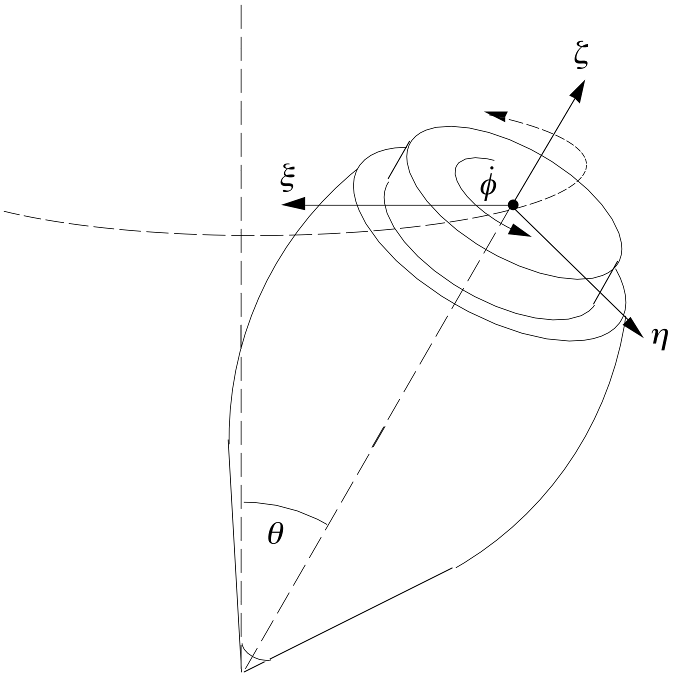
כאשר I הוא טנסור ההתמדה. לו רצינו לחשב את נגזרת התנע הזוויתי באופן ישיר היה עלינו להשתמש במשוואה $\dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathsf{I}}(\boldsymbol{\omega}) + \mathsf{I}(\dot{\boldsymbol{\omega}})$, שמתקבלת מהכלל לגזירת מכפלה. טנסור ההתמדה מכיל אינטגרלים על פני המסה, של פונקציות התלויות בקואורדינטות של נקודות החומר השונות. גזירה ישירה שלו לפי הזמן היתה גוררת חישוב מסובך.

בכדי למנוע סיבוך מסוג זה, נהוג לנקוט בשיטה הבאה: בשלב הראשון, מחשבים את נגזרת התנע הזוויתי במערכת צירים ξ, η, ζ שסובבת כך שרכיבי טנסור האינרציה קבועים. בשלב הבא משתמשים בנוסחה הכללית $\dot{\mathbf{U}} = \dot{\mathbf{U}}_{\xi\eta\zeta} + \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{U}$, למעבר נגזרת מהמערכת ξ, η, ζ , למערכת הצירים האינרציאלית x, y, z , עבור הוקטור $\mathbf{H}$.

לדוגמה, ברור כי במערכת X, Y, Z , הצמודה לגוף הקשיח, הקואורדינטות של נקודות החומר קבועות, ולכן, רכיבי טנסור ההתמדה יהיו קבועים בה. אכן, בחלק גדול מן המקרים, אנו נשתמש בחישוב נגזרת התנע הזוויתי במערכת הגוף, לצורך חישוב נגזרת התנע הזוויתי.

שים לב שרכיבי טנסור האינרציה עשויים להיות קבועים גם במערכת שונה ממערכת הגוף. למשל, עבור הסביבון המתואר בתרשים 10, נבחר את המערכת ξ, η, ζ כך, שהיא צמודה לצירו של הסביבון אך לא סובבת עם הסביבון סביב צירו. בגלל הסימטריה שיש לסביבון סביב צירו, טנסור ההתמדה של הסביבון

במערכת זו נשאר קבוע ואינו תלוי במצב הסביבון.



תרשים 10

נסמן אם כן את מערכת הצירים בה אנו משתמשים כך שטנסור ההתמדה קבוע בה, על ידי ξ, η, ζ . את המהירות הזוויתית שלה יחסית למערכת האינרציאלית, נסמן על ידי $\mathbf{\Omega}$. במקרה (הנפוץ), בו בחרנו במערכת הגוף להיות המערכת יחסית אליה אנו מחשבים את נגזרת התנע הזוויתי, הצירים ξ, η, ζ יתלכדו כמובן עם צירי מערכת הגוף X, Y, Z . במקרה זה, נציב עבור $\mathbf{\Omega}$ את המהירות הזוויתית של צירי הגוף יחסית למערכת האינרציאלית, שהיא כמובן המהירות הזוויתית של הגוף $\boldsymbol{\omega}$.

משוואת התנועה תהיה אם כן

$$\dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{H}}_{\xi\eta\zeta} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{H} .$$

בחישוב $\mathbf{H} = \mathsf{I}(\boldsymbol{\omega})$, עלינו להציב כמובן את המהירות הזוויתית של הגוף הקשיח. עבור חישוב הנגזרת של התנע הזוויתי יחסית למערכת ξ, η, ζ , נקבל

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{H}}_{\xi\eta\zeta} &= \dot{\mathsf{I}}_{\xi\eta\zeta}(\boldsymbol{\omega}) + \mathsf{I}(\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\xi\eta\zeta}) \\ &= \mathsf{I}(\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\xi\eta\zeta})\end{aligned}$$

כי הרי I קבוע במערכת זו. בהצבה למשוואת התנועה נקבל

$$\boxed{\dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{H}}_{\xi\eta\zeta} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{H} = \mathsf{I}(\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\xi\eta\zeta}) + \mathbf{\Omega} \times \mathsf{I}(\boldsymbol{\omega}) .}$$

5.3.3 חישוב נגזרת התנע הזוויתי במערכת הגוף הקשיח

עבור המקרה בו המערכת ξ, η, ζ היא מערכת הגוף עלינו להציב למשוואה זו את $\boldsymbol{\omega}$, $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{XYZ}$ וכו' כמפורט למעלה. כמו-כן, אנו יכולים להשתמש בעובדה כי נגזרת המהירות הזוויתית במערכת הגוף, שווה לנגזרת המהירות הזוויתית במערכת האינרציאלית, $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{XYZ} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$ (כפי שהראינו בסעיף 4.2.12), ומתקבל

$$\boxed{\dot{\mathbf{H}} = \mathsf{I}(\dot{\boldsymbol{\omega}}) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H} = \mathsf{I}(\dot{\boldsymbol{\omega}}) + \boldsymbol{\omega} \times \mathsf{I}(\boldsymbol{\omega})\ .}$$

5.3.4 משוואות אוילר

משוואות אוילר הן משוואות התנע הזוויתי, בהן הנגזרת מחושבת ביחס למערכת הגוף (כפי שרשמנו בסעיף הקודם), עבור המקרה הפרטי בו מערכת הצירים שנבחרה עבור הגוף היא מערכת צירים ראשית (כפי שתמיד ניתן לבחור). במקרה זה טנסור ההתמדה הוא בצורה

$$[\mathsf{I}] = \begin{bmatrix} I_{XX} & 0 & 0 \\ 0 & I_{YY} & 0 \\ 0 & 0 & I_{ZZ} \end{bmatrix},$$

ואז,

$$\{H\} = [\mathsf{I}]\{\omega\} = \begin{bmatrix} I_{XX} & 0 & 0 \\ 0 & I_{YY} & 0 \\ 0 & 0 & I_{ZZ} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_X \\ \omega_Y \\ \omega_Z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_{XX}\omega_X \\ I_{YY}\omega_Y \\ I_{ZZ}\omega_Z \end{Bmatrix},$$

$$[\mathsf{I}]\{\dot{\omega}\} = \begin{Bmatrix} I_{XX}\dot{\omega}_X \\ I_{YY}\dot{\omega}_Y \\ I_{ZZ}\dot{\omega}_Z \end{Bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{J} & \mathbf{K} \\ \omega_X & \omega_Y & \omega_Z \\ I_{XX}\omega_X & I_{YY}\omega_Y & I_{ZZ}\omega_Z \end{vmatrix} = (I_{ZZ} - I_{YY})\omega_Y\omega_Z\mathbf{I} + (I_{XX} - I_{ZZ})\omega_X\omega_Z\mathbf{J} + (I_{YY} - I_{XX})\omega_X\omega_Y\mathbf{K}\ .$$

הצבת המרכיבים השונים תיתן

$$\dot{\mathbf{H}} = [I_{XX}\dot{\omega}_X + (I_{ZZ} - I_{YY})\omega_Y\omega_Z]\mathbf{I} + [I_{YY}\dot{\omega}_Y + (I_{XX} - I_{ZZ})\omega_X\omega_Z]\mathbf{J} + [I_{ZZ}\dot{\omega}_Z + (I_{YY} - I_{XX})\omega_X\omega_Y]\mathbf{K}\ .$$

הצבת רכיב $\dot{\mathbf{H}}$ במשוואות

$$\boldsymbol{\Sigma}M_X = \dot{H}_X\ ,\ \ \boldsymbol{\Sigma}M_Y = \dot{H}_Y\ ,\ \ \boldsymbol{\Sigma}M_Z = \dot{H}_Z,$$

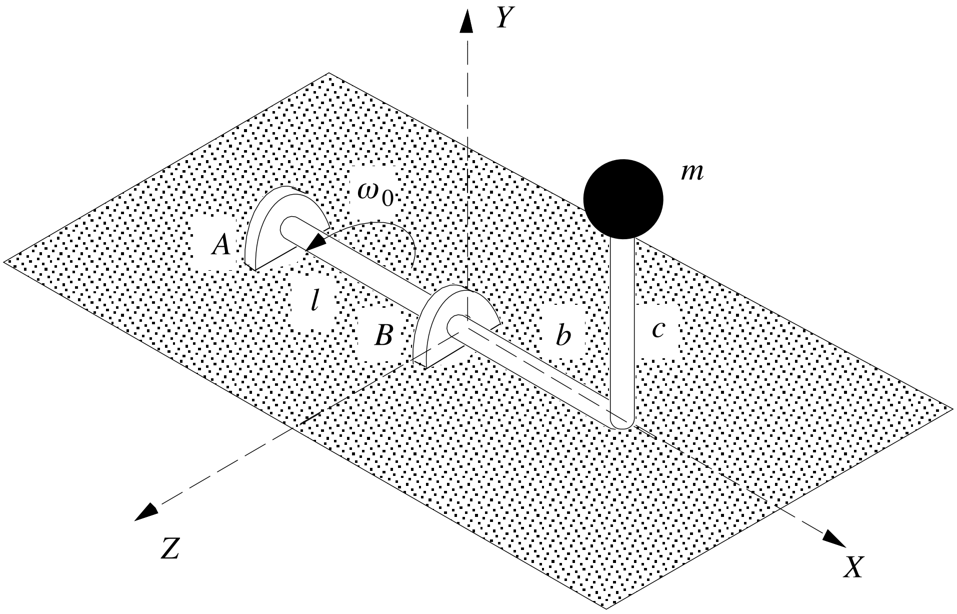
תיתן את המשוואות

$$\boxed{\begin{aligned} \boldsymbol{\Sigma}M_X &= I_{XX}\dot{\omega}_X + (I_{ZZ} - I_{YY})\omega_Y\omega_Z \\ \boldsymbol{\Sigma}M_Y &= I_{YY}\dot{\omega}_Y + (I_{XX} - I_{ZZ})\omega_X\omega_Z \\ \boldsymbol{\Sigma}M_Z &= I_{ZZ}\dot{\omega}_Z + (I_{YY} - I_{XX})\omega_X\omega_Y, \end{aligned}}$$

שפרסם אוילר ב-"*Theoria motus corporum solidorum seu regidorum*" בשנת 1760, ואשר נקראות על שמו.

דוגמה 5.3.5

בכדי להמחיש באופן הפשוט ביותר מספר היבטים של הדינמיקה של גוף קשיח, נדון שוב במערכת של דוגמה 5.1.4 המתוארת שוב בתרשים 11. נתון שהמהירות הזוויתית במצב המתואר היא ω_0 , ובצירים פועל חיכוך, שיוצר מומנט בגודל M_0 בכיוון הפוך למהירות. דרוש לחשב את התאוצה הזוויתית והריאקציות במיסבים A, B בהנחה שהמיסב B אינו נושא עומס צירי.



תרשים 11

פתרון: נשתמש במערכת צירים X, Y, Z הצמודה לגוף הקשיח. כיוון המהירות הזוויתית קבוע ולכן בכל זמן $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{I}$, $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\omega}\mathbf{I}$. בדוגמה 5.1.4 מצאנו כי

$$[\mathsf{I}] = \begin{bmatrix} mc^2 & -mbc & 0 \\ -mbc & mb^2 & 0 \\ 0 & 0 & m(b^2+c^2) \end{bmatrix}, \quad \{H\} = \begin{Bmatrix} \omega_0 mc^2 \\ -\omega_0 mbc \\ 0 \end{Bmatrix} .$$

כמו-כן נחשב

$$[\mathsf{I}]\{\dot{\omega}\} = \begin{bmatrix} mc^2 & -mbc & 0 \\ -mbc & mb^2 & 0 \\ 0 & 0 & m(b^2+c^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\omega} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{\omega} mc^2 \\ -\dot{\omega} mbc \\ 0 \end{Bmatrix} ,$$

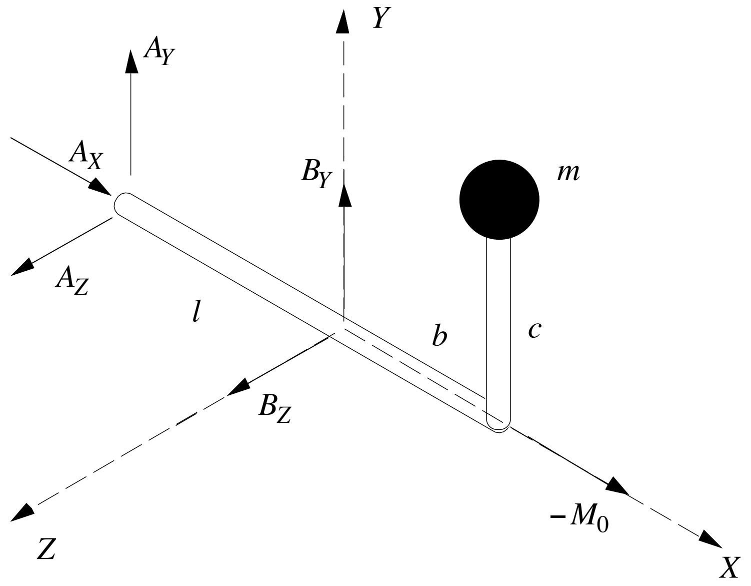
$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H} = \omega_0 \mathbf{I} \times (\omega_0 mc^2 \mathbf{I} - \omega_0 mbc \mathbf{J}) = -\omega_0^2 mbc \mathbf{K} .$$

נציב גדלים אלו למשוואה $\dot{\mathbf{H}} = \mathsf{I}(\dot{\boldsymbol{\omega}}) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}$ ונקבל

$$\dot{H}_X = \dot{\omega} mc^2 \,, \quad \dot{H}_Y = -\dot{\omega} mbc \,, \quad \dot{H}_Z = -\omega_0^2 mbc .$$

עד כאן חישבנו את האגף הימני של המשוואה $\mathbf{\Sigma M} = \dot{\mathbf{H}}$. לחישוב תאוצת מרכז המסה, המופיעה באגף ימין של המשוואה $\mathbf{\Sigma F} = m\ddot{\mathbf{r}}_c$, נשתמש במשוואה $\ddot{\mathbf{R}} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{R} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})$, עבור $\mathbf{R} = b\mathbf{I} + c\mathbf{J}$, ונקבל

$$\ddot{\mathbf{r}}_c = -\omega_0^2 c\mathbf{J} + \dot{\omega} c\mathbf{K} \ .$$



תרשים 12

לצורך חישוב האגף השמאלי של המשוואות $\mathbf{\Sigma M} = \dot{\mathbf{H}}$ ו- $\mathbf{\Sigma F} = m\ddot{\mathbf{r}}_c$, עלינו לצייר דיאגרמת גוף חופשי של הגוף הקשיח כמתואר בתרשים 12. על סמך דיאגרמת הגוף החופשי מתקבל

$$\Sigma F_X = A_X \ , \ \Sigma F_Y = A_Y + B_Y \ , \ \Sigma F_Z = A_Z + B_Z$$
$$\Sigma M_X = -M_0 \ , \ \Sigma M_Y = A_Z l \ , \ \Sigma M_Z = -A_Y l \ .$$

נשווה את האגפים הימנים והשמאליים של משוואות התנועה ונקבל

$$A_X = 0 \ , \ A_Y + B_Y = -m\omega_0^2 c \ , \ A_Z + B_Z = m\dot{\omega} c$$
$$-M_0 = \dot{\omega} mc^2 \ , \ A_Z l = -\dot{\omega} mbc \ , \ -A_Y l = -\omega_0^2 mbc \ .$$

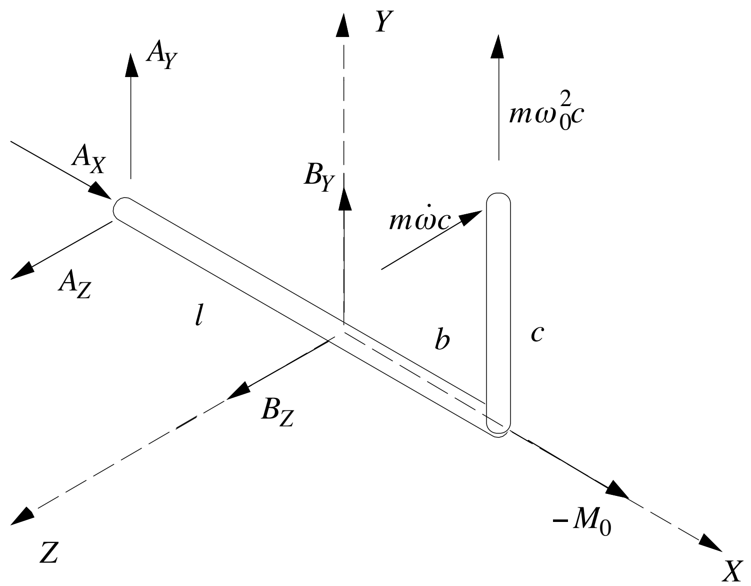
פתרון המשוואות יתן

$$\dot{\omega} = -\frac{M_0}{mc^2} \ ,$$
$$A_X = 0 \ , \ A_Y = \frac{\omega_0^2 mbc}{l} \ , \ A_Z = -\frac{\dot{\omega} mbc}{l} \ .$$
$$B_Y = -m\omega_0^2 c\left(1 + \frac{b}{l}\right) , \ B_Z = m\dot{\omega} c\left(1 + \frac{b}{l}\right)$$

בעיה זו הינה כמובן בעיה בדינמיקה של חלקיק, ופתרונה על ידי משוואות התנועה של גוף קשיח מובא רק לשם הדגמה. לצורך השוואה, אם ברצוננו לפתור את הבעיה על סמך משוואות התנועה של חלקיק, אנו

משתמשים בתאוצה החלקיק (מרכז המסה) שמצאנו ובחוק השני של ניוטון, בכדי לקבל את הכוח **f** הפועל על החלקיק:

$$f_X = 0\ ,\ \ f_Y = -m\omega_0^2 c\ ,\ \ f_Z = m\dot{\omega}c\ .$$



תרשים 13

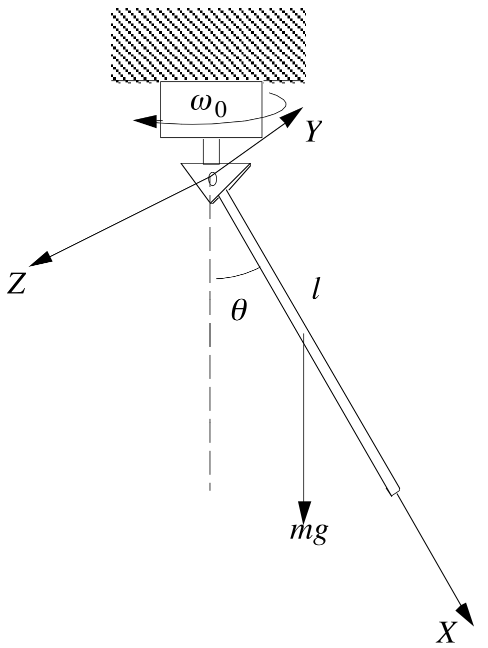
כוח זה מופעל על החלקיק על ידי קצה המוט אליו הוא מחובר, ועל סמך החוק השלישי של ניוטון, החלקיק מפעיל על קצה המוט אותו הכוח בכיוון הפוך. רכיבי הכוח יהיו התגובה לרכיב הנובע מהתאוצה הצנטריפטלית (הכוח הצנטרפוגלי), והתגובה לרכיב הנובע מהתאוצה המשיקית. בדיאגרמת גוף חופשי הדבר יתואר כמו בתרשים 13. מכיוון שהמוט הוא גוף חסר מסה (בהתאם להנחותינו), סכום הכוחות וסכום המומנטים עליו מתאפס. שווי משקל יתן את אותן התוצאות שקיבלנו בשימוש משוואות התנועה של גוף קשיח. כמובן שגישה זו תופסת רק במקרה הפרטי הנדון, בו המסה מרוכזת בנקודה, ולא ניתן לפתור בעזרתה בעיות כלליות יותר כפי שיתוארו בדוגמאות הבאות.

5.3.6 דוגמה

חשב את המהירות הזוויתית הקבועה ω_0 , שבה יש לסובב מוט סביב ציר אנכי על מנת להחזיקו בזווית קבועה θ מהאנך (ראה תרשים 14).

פתרון: נבחר מערכת צירים ראשית כמתואר בתרשים. טנסור ההתמדה של מוט זהה לזה של גליל שרדיוסו מתאפס ועל כן

$$[\mathrm{I}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}ml^2 \end{bmatrix}\ .$$



תרשים 14

וקטור המהירות הזוויתית נמצא במישור של האנך והמוט, מישור X, Y בתרשים, ומצביע מטה בכיוון האנך. מכאן

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_0 \cos\theta \mathbf{I} - \omega_0 \sin\theta \mathbf{J} \ .$$

התנע הזוויתי יהיה אם כן

$$\{H\} = [\mathrm{I}]\{\omega\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}ml^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_0 \cos\theta \\ -\omega_0 \sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3}ml^2\omega_0 \sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \ .$$

התנע הזוויתי אם כן הוא בכיוון Y , וסובב עם הגוף במהירות ω_0 סביב האנך. המהירות הזוויתית קבועה ולכן

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}} &= \mathrm{I}(\dot{\boldsymbol{\omega}}) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H} \\ &= (\omega_0 \cos\theta \mathbf{I} - \omega_0 \sin\theta \mathbf{J}) \times (-\tfrac{1}{3}ml^2\omega_0 \sin\theta \mathbf{J}) \ , \\ \dot{\mathbf{H}} &= -\tfrac{1}{3}ml^2\omega_0^2 \sin\theta \cos\theta \mathbf{K} \ . \end{aligned}$$

המומנט של הכוחות החיצוניים הפועל בכיוון Z הוא כמובן $-mg\dfrac{l}{2}\sin\theta$, ולכן משוואת התנע הזוויתי בכיוון Z תהיה

$$-mg\frac{l}{2}\sin\theta = -\tfrac{1}{3}ml^2\omega_0^2 \sin\theta \cos\theta \ ,$$

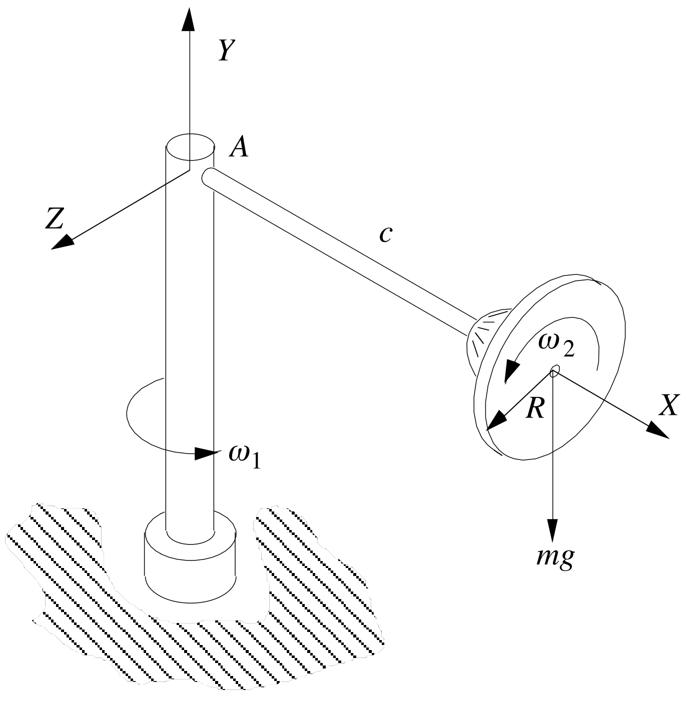
ומכאן

$$\omega_0^2 = \frac{3g}{2l\cos\theta} \ .$$

דוגמה 5.3.7

בתרשים 15 מתוארת מערכת המורכבת מציר אנכי הסובב במהירות זוויתית ω_1 ותאוצה זוויתית $\dot{\omega}_1$. בנקודה A, מחובר לציר האנכי מוט אופקי, שאורכו c. בקצה המוט האופקי נמצא מנוע המסובב דיסקה (נתוניה מופיעים בתרשים) במהירות זוויתית ω_2 ובתאוצה זוויתית $\dot{\omega}_2$. דרוש לחשב עבור המצב המתואר, את הריאקציות בנקודה A והמומנט שמפעיל המנוע על הדיסקה. הזנח את מסת המוט האופקי ומסת המנוע.

פתרון: אנו ממשיכים באופן דימיוני את הדיסקה כך שתכלול נקודה המתלכדת עם הנקודה A. נקודה זו נייחת כמובן בכל רגע. למשל, ניתן להניח שהמוט האופקי הוא חלק מהדיסקה וסובב יחד איתה. אנו מסיקים אם כן שהדיסקה סובבת סביב הנקודה הקבועה A. לכן, משוואת התנע הזוויתי יחסית לנקודה A, תיתן את המומנטים יחסית לנקודה A הדרושים לקיום התנועה הנתונה. לחילופין, יכולנו לכתוב את משוואת התנע הזוויתי יחסית למרכז המסה, למצוא את הכוחות והמומנטים שפועלים על הדיסקה במרכז המסה, ולהפעיל את הריאקציות של כוחות ומומנטים אלו על קצה המוט האופקי. אזי, שווי משקל של המוט האופקי, כאשר בצד אחד פועלות התגובות שמפעילה הדיסקה על המוט, ובצד השני פועלות התגובות שמפעיל הציר האנכי בנקודה A, יתן את התוצאות הדרושות. המוט אמנם לא נמצא בשווי משקל מבחינה קינמטית, אך בגלל הזנחת מסתו, סכום הכוחות וסכום המומנטים עליו מתאפסים. (ראה תהליך דומה בדוגמה 5.3.5 בה העובדה שמדובר בחלקיק גורמת לכך שעל החלקיק פועלים רק כוחות, ולא מומנטים כמו בדוגמה הנוכחית.)



תרשים 15

מערכת הצירים המתוארת בתרשים הינה מערכת צירים ראשית הצמודה לדיסקה, ומסיבה זו ניתן להשתמש במשוואות אוילר כמשוואות התנע הזוויתי. השלבים הבאים בפתרון הם:

1. חישוב המהירות הזוויתית והתאוצה הזוויתית בהן נשתמש במשוואות התנע הזוויתי (משוואות אוילר במקרה זה),
2. חישוב טנסור ההתמדה,

3. חישוב תאוצת מרכז המסה בה נשתמש במשוואת התנועה של מרכז המסה (החוק השני של ניוטון),
4. חישוב נגזרת התנע הזוויתי (על סמך משוואות אוילר במקרה זה),
5. דיאגרמת גוף חופשי לצורך מציאת שקול הכוחות ושקול המומנטים שיופיעו במשוואות התנועה של מרכז המסה והתנע הזוויתי,
6. הצבה במשוואות וקבלת הגדלים הדרושים.

1. חישוב המהירות והתאוצה הזוויתית

רגעית, המהירות הזוויתית והתאוצה הזוויתית של הציר האנכי הן:

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \omega_1 \mathbf{J}\,, \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 = \dot{\omega}_1 \mathbf{J}\,.$$

המהירות הזוויתית והתאוצה הזוויתית של הדיסקה יחסית לציר האופקי הן:

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \omega_2 \mathbf{I}\,, \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 = \dot{\omega}_2 \mathbf{I}\,.$$

על סמך סעיפים 4.4.2, 4.4.3 המהירות והתאוצה הזוויתית של הדיסקה הן

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 = \omega_2 \mathbf{I} + \omega_1 \mathbf{J}$$
$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 + \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2 = \dot{\omega}_2 \mathbf{I} + \dot{\omega}_1 \mathbf{J} - \omega_1 \omega_2 \mathbf{K}\,.$$

2. חישוב טנסור ההתמדה

אנו יכולים לקבל את טנסור ההתמדה יחסית למרכז המסה על ידי הטנסור המתאים לגליל שאורכו אפס. נקבל עבור מערכת צירים מקבילה שראשיתה במרכז הדיסקה

$$[\mathrm{I}_c] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}mR^2 \end{bmatrix}.$$

נשתמש כעת במשפט שטיינר עבור $X_c = c\,,\ Y_c = Z_c = 0$ ונקבל את טנסור ההתמדה יחסית לנקודה A

$$[\mathrm{I}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}mR^2 + mc^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}mR^2 + mc^2 \end{bmatrix}.$$

3. חישוב תאוצת מרכז המסה

את תאוצת מרכז המסה פשוט לחשב על ידי התייחסות אליו כאל נקודת חומר, שעבורה $\mathbf{R} = c\mathbf{I}$, במערכת שצמודה למוט האופקי. מהירותו ותאוצתו הזוויתית של המוט הן כמובן $\boldsymbol{\omega}_1 = \omega_1 \mathbf{J}$ ו-$\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 = \dot{\omega}_1 \mathbf{J}$ (ניתן כמובן גם להשתמש במערכת הצמודה לגוף הקשיח ולהציב את $\boldsymbol{\omega}$ ונגזרתה). מכאן

$$\ddot{\mathbf{r}}_c = \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \times \mathbf{R} + \boldsymbol{\omega}_1 \times (\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{R}) = -\omega_1^2 c\mathbf{I} - \dot{\omega}_1 c\mathbf{K}\,.$$

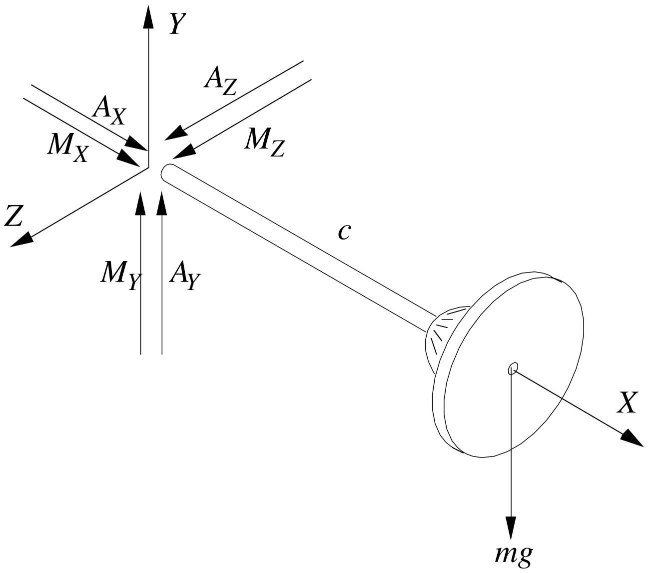
4. חישוב נגזרת התנע הזוויתי

ממשוואות אוילר ומהנתונים שחישבנו עד כה מתקבל

$$\boldsymbol{\Sigma} M_X = \dot{H}_X = I_{XX}\dot{\omega}_X + (I_{ZZ} - I_{YY})\omega_Y\omega_Z = \tfrac{1}{2}mR^2\dot{\omega}_2$$
$$\boldsymbol{\Sigma} M_Y = \dot{H}_Y = I_{YY}\dot{\omega}_Y + (I_{XX} - I_{ZZ})\omega_X\omega_Z = \left(\tfrac{1}{4}mR^2 + mc^2\right)\dot{\omega}_1$$
$$. \boldsymbol{\Sigma} M_Z = \dot{H}_Z = I_{ZZ}\dot{\omega}_Z + (I_{YY} - I_{XX})\omega_X\omega_Y = -\tfrac{1}{2}mR^2\omega_1\omega_2$$

5. דיאגרמת גוף חופשי

דיאגרמת הגוף החופשי עבור הדיסקה (המורחבת באופן דמיוני כך שהמנוע והמוט הם חלקים בה) מתוארת בתרשים 16. שים לב כי את המומנט על הדיסקה בכיוון X מפעיל למעשה המנוע ולא החיבור.



תרשים 16

מהדיאגרמה,

$$\boldsymbol{\Sigma} F_X = A_X \ , \ \ \boldsymbol{\Sigma} F_Y = A_Y - mg \ , \ \ \boldsymbol{\Sigma} F_Z = A_Z$$
$$. \boldsymbol{\Sigma} M_X = M_X \ , \ \ \boldsymbol{\Sigma} M_Y = M_Y \ , \ \ \boldsymbol{\Sigma} M_Z = M_Z - mgc$$

משוואות תנועת מרכז המסה: $\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}_c$, והתנע הזוויתי : $\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{M} = \dot{\mathbf{H}}$, יתנו כעת

$$A_X = -m\omega_1^2 c \ , \ \ A_Y - mg = 0 \ , \ \ A_Z = -m\dot{\omega}_1 c$$
$$. M_X = \tfrac{1}{2}mR^2\dot{\omega}_2 \ , \ \ M_Y = \left(\tfrac{1}{4}mR^2 + mc^2\right)\dot{\omega}_1 \ , \ \ M_Z - mgc = -\tfrac{1}{2}mR^2\omega_1\omega_2$$

נשים לב לכך שעבור המקרה בו המהירויות הזוויתיות מקיימות את הקשר

$$, \ gc = \tfrac{1}{2}R^2\omega_1\omega_2$$

המומנט M_Z מתאפס. כלומר, במקרה כזה, אפילו אם המוט מחובר לציר האנכי על ידי פרק שמקביל לציר Z המוט ישאר במצב אופקי ולא יפול.

המומנט M_X שמצאנו, הוא המומנט בכיוון X שיפעל על הגוף המורחב באופן דמיוני, והוא המומנט שיפעל על הדיסקה. את המומנט הזה מפעיל על הדיסקה המנוע. מאזן מומנטים על המוט האופקי חסר המסה יראה שזהו גם המומנט שפועל בנקודה A על קצה המוט.

דוגמה 5.3.8

כדוגמה לתופעה של חוסר איזון דינמי, נדון שוב במערכת של דוגמה 5.1.6, והמתוארת שוב בתרשים 17. דרוש לחשב את הכוחות הפועלים על המיסבים A ו-B בהזנחת כוח הכובד. המיסב B אינו נושא עומס צירי והמרחק בין המיסבים הוא l.

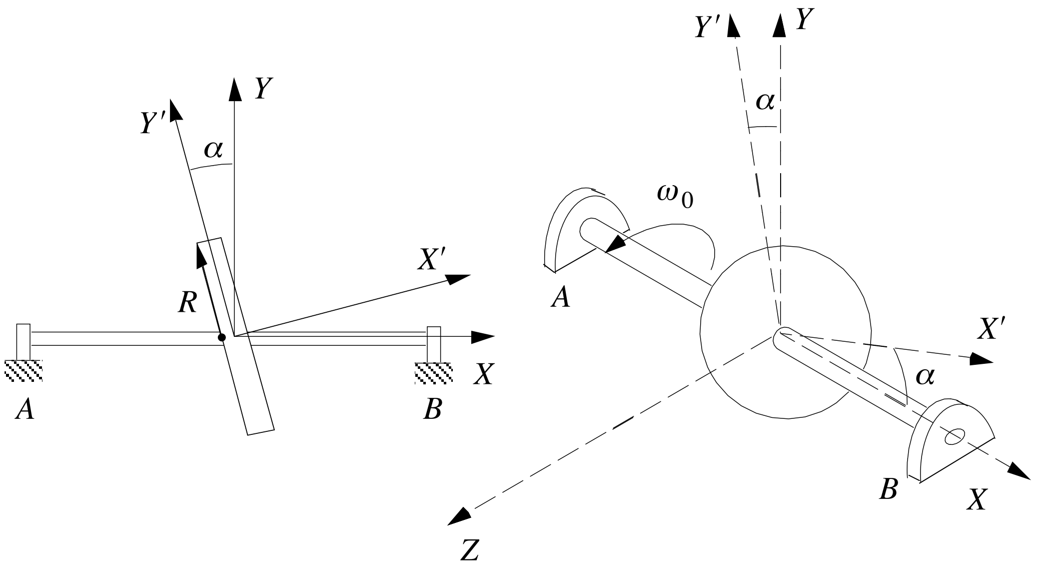
פתרון: במקרה המתואר, תאוצת מרכז המסה מתאפסת, ולכן, סכום הכוחות מתאפס. נותר לנו לחשב את הנגזרת של התנע הזוויתי. המהירות הזוויתית קבועה ועל כן

$$\dot{\mathbf{H}} = \mathsf{I}(\dot{\boldsymbol{\omega}}) + \boldsymbol{\omega} \times \mathsf{I}(\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}\,.$$

את רכיבי המהירות הזוויתית והתנע הזוויתי יחסית לצירים הראשיים X', Y', Z', קיבלנו בדוגמה 5.1.6:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_0 \cos\alpha \mathbf{I}' - \omega_0 \sin\alpha \mathbf{J}'$$

$$\mathbf{H} = mR^2\omega_0(\tfrac{1}{2}\cos\alpha\mathbf{I}' - \tfrac{1}{4}\sin\alpha\mathbf{J}')\,.$$



תרשים 17

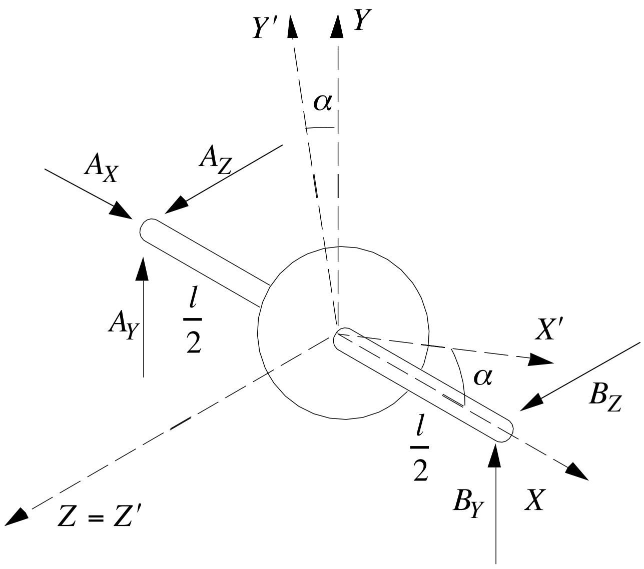
על כן

$$\Sigma\mathbf{M} = \tfrac{1}{4}mR^2\omega_0^2 \sin\alpha\cos\alpha\mathbf{K}'\,.$$

דיאגרמת גוף חופשי עבור הגוף המורכב מהציר והדיסקה מתוארת בתרשים 18. מדיאגרמת הגוף החופשי ומשוואות התנועה מתקבל

$$A_X = 0\,,\quad A_Y + B_Y = 0\,,\quad A_Z + B_Z = 0$$

$$A_Z\frac{l}{2} - B_Z\frac{l}{2} = 0\,,\quad B_Y\frac{l}{2} - A_Y\frac{l}{2} = \tfrac{1}{4}mR^2\omega_0^2\sin\alpha\cos\alpha\,.$$



תרשים 18

מכאן,

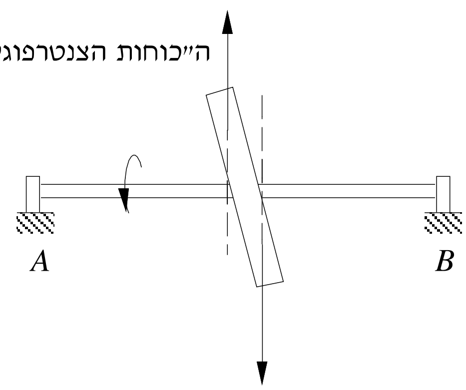
$$A_X = 0\,, \quad A_Z = B_Z = 0$$

$$. \; B_Y = -A_Y = \frac{1}{4l} m R^2 \omega_0^2 \sin\alpha \cos\alpha$$

הציר Y סובב עם הדיסקה במהירות ω_0 סביב ציר הסיבוב. לפיכך, משמעות התוצאה שקיבלנו היא שהמיסבים מפעילים כוח בשעור

$$\frac{1}{4l} m R^2 \omega_0^2 \sin\alpha \cos\alpha$$

בכיוון המשתנה מרגע לרגע עם סיבוב הדיסקה. כמובן שהכוח הפועל על המיסבים, הוא אותו כוח בכיוון הפוך. כוחות אלו, המועברים לבסיס ומשתנים בזמן, הם הסיבה לתופעות רבות של רעידות בציוד מכני. הסבר בלשון עממית לתופעה מוצג בתרשים 19. ה"כוחות הצנטרפוגליים" אינם נמצאים על ישר אחד ויוצרים צמד כוחות שכיוונו עוקב אחרי הסיבוב סביב הציר. חוסר האיזון הדינמי קורה אף על פי שמרכז הכובד של הדיסקה נמצא על הציר, והדיסקה מאוזנת מבחינה סטטית.



תרשים 19

בכדי לזהות את הגורם שיוצר את חוסר האיזון הדינמי, נשים לב לעובדה שגילינו בדוגמה 5.1.6 והיא שמערכת הצירים X, Y, Z אינה מערכת צירים ראשית (ראינו ש- I_{XY} שונה מאפס). נניח אם כן כי גוף כלשהו סובב במהירות זוויתית קבועה ω_0 סביב ציר X. התנע הזוויתי יהיה

$$\begin{Bmatrix} H_X \\ H_Y \\ H_Z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{XX} & I_{XY} & I_{XZ} \\ I_{YX} & I_{YY} & I_{YZ} \\ I_{ZX} & I_{ZY} & I_{ZZ} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} I_{XX}\omega_0 \\ I_{YX}\omega_0 \\ I_{ZX}\omega_0 \end{Bmatrix}$$

ומשוואת התנע הזוויתי תהיה

$$\Sigma\mathbf{M} = \dot{\mathbf{H}} = \mathsf{I}(\dot{\boldsymbol{\omega}}) + \boldsymbol{\omega} \times \mathsf{I}(\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{J} & \mathbf{K} \\ \omega_0 & 0 & 0 \\ I_{XX}\omega_0 & I_{YX}\omega_0 & I_{ZX}\omega_0 \end{vmatrix}.$$

חישוב המכפלה הוקטורית נותן

$$\Sigma\mathbf{M} = -I_{ZX}\omega_0^2\mathbf{J} + I_{YX}\omega_0^2\mathbf{K}.$$

כלומר על הגוף הקשיח חייב לפעול מומנט בכיוון ניצב לציר הסיבוב אם מכפלות ההתמדה שונות מאפס. זהו המומנט של הכוחות שיועברו מהמיסבים לבסיס. לסיכום, התנאי לאיזון דינמי הוא שמכפלות האינרציה I_{YX}, I_{ZX}, יתאפסו.

5.3.9 דוגמה

הסביבון המתואר בתרשים 20 הוא בעל סימטריה צירית, צירו נטוי בזווית קבועה θ לאנך, והוא סובב סביב נקודה קבועה (נקודת המגע שלו עם הקרקע). ציר הסביבון סובב במהירות זוויתית קבועה $\dot{\psi}$ סביב ציר אנכי, והסביבון סובב סביב צירו במהירות זוויתית קבועה $\dot{\phi}$. דרוש למצוא את הקשר בין המהירויות $\dot{\phi}$ ו- $\dot{\psi}$ לזווית הנטיה θ, שמאפשר תנועה קצובה זאת. מרכז המסה נמצא במרחק l מקודקוד הסביבון.

פתרון: בין היתר נדגים בבעיה זו פתרון בו אנו מחשבים את הנגזרת של התנע הזוויתי במערכת שאינה מערכת הגוף. מערכת מסוג זה תהיה המערכת ξ, η, ζ המתוארת בתרשים שסובבת סביב האנך במהירות הזוויתית $\dot{\psi}$. כלומר, במערכת זו ציר הסיבוב הוא בעל קואורדינטות קבועות. ציר ζ מתלכד אם ציר הסביבון, והציר η ניצב לו במישור של ציר ζ והאנך. מערכת הצירים X, Y, Z צמודה לגוף, ומתלכדת במצב הנתון עם המערכת ξ, η, ζ.

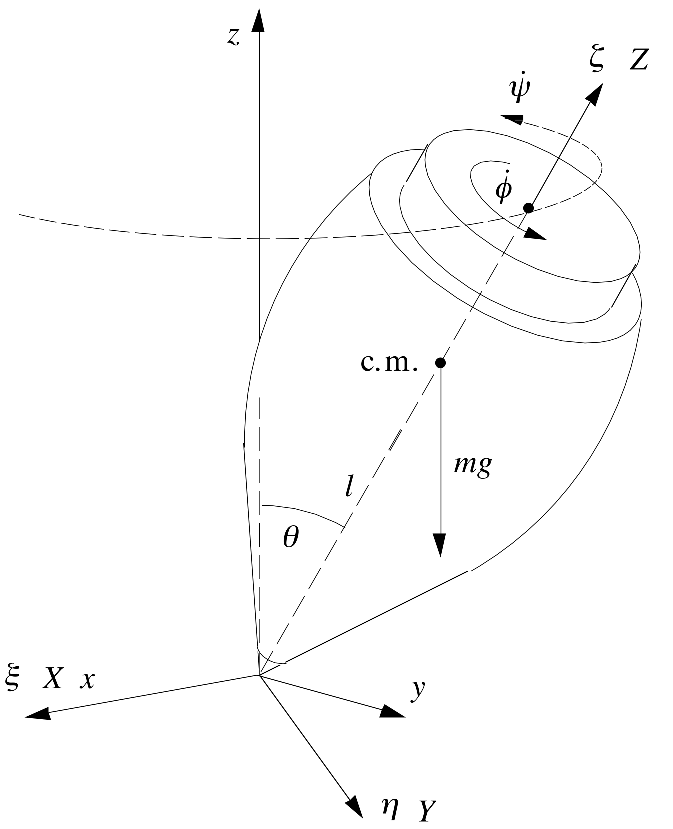
שלב 1. מציאת המהירויות הזוויתיות

נסמן על ידי $\boldsymbol{\omega}_1$ את המהירות הזוויתית של המערכת ξ, η, ζ יחסית למערכת המרחב. מכיוון שציר הסיבוב של $\boldsymbol{\omega}_1$ הוא אנכי

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \dot{\psi}\mathbf{k} = -\dot{\psi}\sin\theta\hat{\boldsymbol{\eta}} + \dot{\psi}\cos\theta\hat{\boldsymbol{\zeta}}.$$

נסמן על ידי $\boldsymbol{\omega}_{21}$ את המהירות הזוויתית של הסביבון יחסית למערכת ξ, η, ζ. כלומר,

$$\boldsymbol{\omega}_{21} = \dot{\phi}\hat{\boldsymbol{\zeta}}.$$



תרשים 20

אנו כותבים את הרכיבים יחסית לוקטורי היחידה במערכת ξ, η, ζ , למרות שהם מתלכדים רגעית עם וקטורי היחידה של מערכת הגוף, בכדי להדגיש שביטויים אלו נכונים בכל זמן וזמן. וקטורי היחידה של מערכת הגוף סובבים סביב צירו, ולכן, במצב רגע קט לאחר זה המתואר בתרשים, $\boldsymbol{\omega}_1$ לא יהיה יותר במישור Y, Z , אבל יהיה עדיין במישור η, ζ .

על סמך סעיף 4.4.2,

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_{21} = -\dot\psi \sin\theta \hat{\boldsymbol{\eta}} + (\dot\phi + \dot\psi\cos\theta)\hat{\boldsymbol{\zeta}} \; .$$

שלב 2. חישוב התנע הזוויתי

כתוצאה מהסימטריה, מערכות הצירים X, Y, Z ו-ξ, η, ζ הן מערכות צירים ראשיות. זאת ועוד, בגלל הסימטריה הסיבובית, סיבוב של הגוף סביב צירו יחסית למערכת ξ, η, ζ , לא ישנה את רכיבי ההתמדה במערכת זו. כלומר, אף על פי שהמערכת ξ, η, ζ אינה צמודה לגוף, רכיבי טנסור ההתמדה קבועים בה. זוהי הסיבה לכך שאנו יכולים לבחור לעשות את החישובים יחסית למערכת זו. נסמן $I_{\xi\xi} = I_{\eta\eta} = I_1$, $I_{\zeta\zeta} = I_0$. טנסור האינרציה יהיה אם כן

$$[\mathsf{I}] = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_0 \end{bmatrix}.$$

התנע הזוויתי יהיה

$$\{H\} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -\dot{\psi}\sin\theta \\ \dot{\phi}+\dot{\psi}\cos\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -I_1\dot{\psi}\sin\theta \\ I_0(\dot{\phi}+\dot{\psi}\cos\theta) \end{Bmatrix}.$$

שלב 3. חישוב נגזרת התנע הזוויתי

המשוואה שמקשרת את נגזרת התנע הזוויתי במערכת ξ, η, ζ עם זו במערכת המרחב, נתקבלה בסעיף 5.3.2

$$\dot{\mathbf{H}} = \dot{\mathbf{H}}_{\xi\eta\zeta} + \mathbf{\Omega}\times\mathbf{H} = \mathsf{I}(\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\xi\eta\zeta}) + \mathbf{\Omega}\times\mathsf{I}(\boldsymbol{\omega}).$$

כאמור, אנו בחרנו במערכת זו משום שרכיבי המהירות הזוויתית בה נשארים קבועים, כלומר, $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\xi\eta\zeta} = \mathbf{0}$. המהירות הזוויתית $\mathbf{\Omega}$, בה סובבת המערכת יחסית למערכת המרחב, היא במקרה הנדון $\boldsymbol{\omega}_1$, ומכאן

$$\dot{\mathbf{H}} = \boldsymbol{\omega}_1\times\mathbf{H} = \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{\xi}} & \hat{\boldsymbol{\eta}} & \hat{\boldsymbol{\zeta}} \\ 0 & -\dot{\psi}\sin\theta & \dot{\psi}\cos\theta \\ 0 & -I_1\dot{\psi}\sin\theta & I_0(\dot{\phi}+\dot{\psi}\cos\theta) \end{vmatrix},$$

$$\dot{\mathbf{H}} = \dot{\psi}\sin\theta[(I_1-I_0)\dot{\psi}\cos\theta - I_0\dot{\phi}]\hat{\boldsymbol{\xi}}.$$

שלב 4. יישום משוואת התנע הזוויתי

המומנט היחידי הפועל יחסית לראשית הוא המומנט של כוח הכובד והוא

$$\mathbf{\Sigma M} = -mgl\sin\theta\hat{\boldsymbol{\xi}}.$$

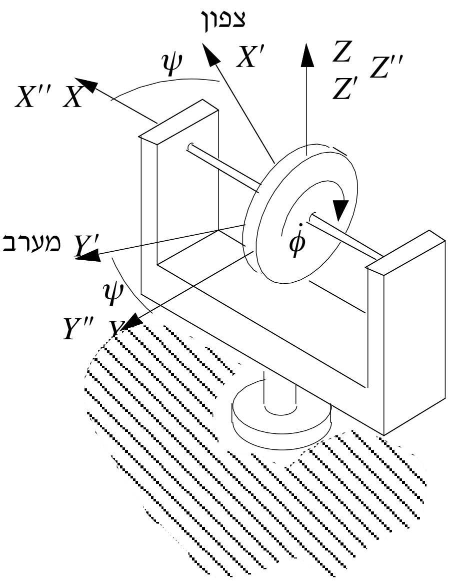
משוואת התנע הזוויתי גוררת

$$-mgl\sin\theta = \dot{\psi}\sin\theta[(I_1-I_0)\dot{\psi}\cos\theta - I_0\dot{\phi}],$$

$$\cos\theta = \frac{I_0\dot{\phi}\dot{\psi} - mgl}{\dot{\psi}^2(I_1-I_0)}.$$

דוגמה 5.3.10

בדוגמה זו ננסה להראות את העיקרון עליו מבוססת פעולת מצפן גירוסקופי. המצפן מתואר בתרשים 21 והוא מכיל דיסקה אשר סובבת במהירות זוויתית קבועה $\dot{\phi}$ סביב ציר אופקי. הציר האופקי, המתואר על ידי ציר X בתרשים, חופשי לנוע סביב ציר אנכי, ציר Z' בתרשים. כלומר, כל המסגרת המתוארת חופשיה להסתובב במישור אופקי. הצפון מתואר בתרשים על ידי ציר X', והציר X אמור להצביע בכיוון הצפון וכך לשמש כמצפן. בתרשים מתואר מצב בו, כתוצאה מהפרעה כלשהי, המצפן מוסט בזווית ψ מהצפון. כדי להראות שהמצפן אכן ממלא את תפקידו, עלינו להראות שהוא ישאף לחזור לכיוון הצפון.

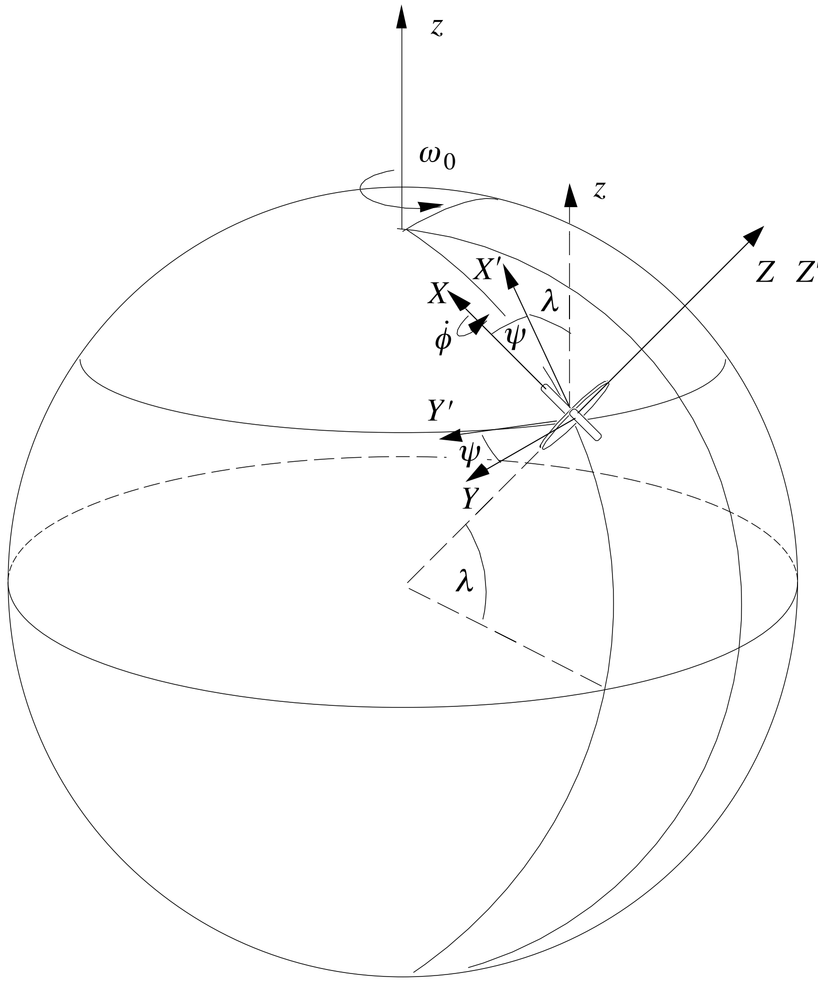


תרשים 21

פתרון: בתרשים 22 מתואר מצבו של המצפן יחסית לכדור הארץ. ציר כדור הארץ הוא הציר z, וכדור הארץ סובב סביב צירו במהירות זוויתית ω_0 של סיבוב ביום. המצפן נמצא במקום בו קו הרוחב הוא λ, וזוהי גם הזווית בין האנך Z' לבין ציר כדור הארץ. כיוון הצפון, X', לגבי מקום המצפן, הוא המשיק לקו האורך. ציר המצפן מסובב יחסית לצפון במישור המשיק לכדור הארץ (שהניצב לו הוא Z'), בזווית ψ.

מערכת הצירים X, Y, Z היא מערכת צירים ראשית, ולכן נרצה לכתוב את משוואות התנע הזוויתי יחסית אליה. מערכת זו תהיה צמודה לגוף הקשיח ורגעית הציר Z מתלכד אם הציר Z'. המערכת X', Y', Z' צמודה לכדור הארץ ומסתובבת איתו.

שני הקשיים העקריים בדוגמה הם אלה: ישנן מספר מערכות הסובבות זו יחסית לזו, והמערכות נמצאות בכיוונים שאינם מקבילים.



תרשים 22

שלב 1. תאור מערכות הצירים והמהירויות ביניהן

ישנן שלוש מערכת צירים הנעות זו יחסית לזו בנוסף על מערכת המרחב: האחת, המערכת הצמודה לדיסקה, X, Y, Z , נעה יחסית למסגרת של המצפן במהירות זוויתית $\boldsymbol{\omega}_{32} = \dot{\phi}\mathbf{I}$. המערכת השניה, זו הצמודה למסגרת המצפן ומסומנת על ידי X'', Y'', Z'' , סובבת במהירות זוויתית $\boldsymbol{\omega}_{21} = \dot{\psi}\mathbf{K}$ יחסית לכדור הארץ. הציר Z'' יתלכד עם הציר Z' תמיד (ולא רגעית כמו ציר Z). המערכת השלישית היא מערכת כדור הארץ הסובבת יחסית למערכת המרחב במהירות זוויתית $\boldsymbol{\omega}_1 = \omega_0\mathbf{k}$.

שלב 2. תאור הקשר בין וקטורי היחידה

על מנת להביא את הביטויים עבור המהירויות הזוויתיות השונות למכנה משותף, עלינו לבטא את כולן באמצעות רכיביהן באותו בסיס. מכיון שמערכת הצירים X, Y, Z היא מערכת צירים ראשית נמצא את רכיבי $\boldsymbol{\omega}_1$ במערכת זו. כמובן שהמערכת X'', Y'', Z'' מקבילה לה רגעית. מתרשים 22 נובע כי

$$\mathbf{k} = \cos\lambda\mathbf{I}' + \sin\lambda\mathbf{K}' ,$$

$$, \mathbf{I}' = \cos\psi\mathbf{I} - \sin\psi\mathbf{J}$$

ולכן,

$$\mathbf{k} = \cos\lambda\cos\psi\mathbf{I} - \cos\lambda\sin\psi\mathbf{J} + \sin\lambda\mathbf{K}$$

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \omega_0(\cos\lambda\cos\psi\mathbf{I} - \cos\lambda\sin\psi\mathbf{J} + \sin\lambda\mathbf{K}) \,.$$

שלב 3. חישוב המהירות הזוויתית והתאוצה הזוויתית הכללית של הדיסקה

נסמן על ידי $\boldsymbol{\omega}_2$ את המהירות הזוויתית של מסגרת המצפן (מערכת X'', Y'', Z''), ועל ידי $\boldsymbol{\omega}$ את המהירות הזוויתית של הדיסקה. על סמך הסעיפים 4.4.2, 4.4.3 העוסקים במהירות ובתאוצה הזוויתית של גופים הסובבים לגופים אחרים, אנו יכולים לרשום

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_{21}$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_2 = \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{21} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_{21} \,,$$

וכמו כן,

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_2 + \boldsymbol{\omega}_{32}$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{32} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{\omega}_{32} \,.$$

בהצבה נקבל עבור המהירות הזוויתית

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_{21} + \boldsymbol{\omega}_{32} = \omega_0(\cos\lambda\cos\psi\mathbf{I} - \cos\lambda\sin\psi\mathbf{J} + \sin\lambda\mathbf{K}) + \dot{\psi}\mathbf{K} + \dot{\phi}\mathbf{I} \,,$$

$$\boldsymbol{\omega} = (\dot{\phi} + \omega_0\cos\lambda\cos\psi)\mathbf{I} - \omega_0\cos\lambda\sin\psi\mathbf{J} + (\dot{\psi} + \omega_0\sin\lambda)\mathbf{K} \,.$$

עבור התאוצה הזוויתית:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\omega}} &= \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{21} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_{21} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{32} + (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_{21}) \times \boldsymbol{\omega}_{32} \\ &= \mathbf{0} + \dot{\boldsymbol{\omega}}_{21} + \boldsymbol{\omega}_1 \times (\boldsymbol{\omega}_{21} + \boldsymbol{\omega}_{32}) + \mathbf{0} + \boldsymbol{\omega}_{21} \times \boldsymbol{\omega}_{32} \,,\end{aligned}$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = \ddot{\psi}\mathbf{K} + \begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{J} & \mathbf{K} \\ \omega_0\cos\lambda\cos\psi & -\omega_0\cos\lambda\sin\psi & \omega_0\sin\lambda \\ \dot{\phi} & 0 & \dot{\psi} \end{vmatrix} + \dot{\psi}\mathbf{K} \times \dot{\phi}\mathbf{I} \,.$$

בחישובים השתמשנו בתוצאות עבור המהירות הזוויתית, השתמשנו בכך שמהירות סיבוב הדיסקה סביב צירה קבועה - $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{32} = \mathbf{0}$, ובעובדה שמהירות סיבוב הארץ סביב צירו קבועה - $\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 = \mathbf{0}$. החישוב יתן

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\dot{\psi}\omega_0\cos\lambda\sin\psi\mathbf{I} + (\omega_0\dot{\phi}\sin\lambda - \omega_0\dot{\psi}\cos\lambda\cos\psi + \dot{\psi}\dot{\phi})\mathbf{J} + (\ddot{\psi} + \omega_0\dot{\phi}\cos\lambda\sin\psi)\mathbf{K} \,.$$

שלב 4. הצבה למשוואות אוילר

כדי להראות את הצורה בה מתפקד המצפן, מספיק לדון במשוואת התנע הזוויתי בכיוון Z, שסביבו המומנט החיצוני מתאפס (כי המסגרת חופשית להסתובב סביב ציר זה). המשוואה בכיוון X תיתן לנו את המומנט הדרוש סביב ציר הדיסקה, על מנת לשמור על המהירות הזוויתית הקבועה (מומנט שיסופק על ידי מנוע). חישוב יתן שהמומנט הנדרש הוא קטן למדי. המשוואה בכיוון Y תיתן את התגובות במיסבים ולכן אינה חשובה כל כך. מכיון שאנו דנים במערכת צירים ראשית הצמודה לגוף אנו יכולים להשתמש במשוואות אוילר. המשוואה בכיוון Z תהיה:

$$\boldsymbol{\Sigma}M_Z = 0 = I_{ZZ}\dot{\omega}_Z + (I_{YY} - I_{XX})\omega_X\omega_Y \,.$$

עבור הדיסקה

$$I_{ZZ} = I_{YY} = \tfrac{1}{4}mR^2 \;,\; I_{XX} = \tfrac{1}{2}mR^2 \;,$$

והצבות ערכים אלו וערכי המהירויות והתאוצות הזוויתיות, יתנו:

$$0 = \ddot{\psi} + 2\omega_0\dot{\phi}\cos\lambda\sin\psi + \omega_0^2\cos^2\lambda\cos\psi\sin\psi \;.$$

קיבלנו משוואה דיפרנציאלית מסובכת עבור התלות בזמן של הזווית ψ, שמתארת את הסטיה מהצפון. אולם ניתן לעשות את השיקולים הבאים. ראשית, $\ddot{\psi} = -2\omega_0\dot{\phi}\cos\lambda\sin\psi - \omega_0^2\cos^2\lambda\cos\psi\sin\psi$. מכיון שאגף ימין של המשוואה שלילי כאשר ψ חיובי (מפני שכל הכופלים חיוביים), כאשר יש הסטה של המצפן בכיוון מערב (ψ חיובי) יש תאוצה זוויתית בכיוון ההפוך. ולהפך, כאשר ψ שלילי, $\ddot{\psi}$ חיובי, ושוב תהיה מגמה למצפן לשוב לכיוון הצפון. כאשר ψ מתאפסת, כלומר, המצפן מצביע צפונה, התאוצה של ψ מתאפסת גם כן. אנו מסיקים שאם המצפן במנוחה ומצביע צפונה, הוא יתמיד במצב שווי משקל זה.

שיקול נוסף שניתן לעשות קשור בסדרי גודל. מהירות הסיבוב של כדור הארץ סביב צירו היא גודל קטן מאוד יחסית לגדלים האחרים (סיבוב ביום). על כן, ניתן להזניח את האיבר בו היא מופיעה בחזקה שניה, לעומת האיבר בו היא מופיעה בחזקה ראשונה כשהיא כופלת את מהירות סיבוב הג׳ירוסקופ סביב צירו. בנוסף, עבור הפרעות קטנות, ψ קטנה, וניתן לקרב את סינוס הזווית על ידי הזווית עצמה. מתקבל בקרוב,

$$\ddot{\psi} + 2\omega_0\dot{\phi}\cos\lambda\psi = 0 \;.$$

הכופל של ψ באיבר השני הוא גודל חיובי קבוע עבור תנועת הג׳ירוסקופ, ונסמן לכן $c^2 = 2\omega_0\dot{\phi}\cos\lambda$. קיבלנו,

$$\ddot{\psi} + c^2\psi = 0 \;.$$

משוואה זו מתארת תנודות בתדירות של c רדיאנים לשניה סביב הצפון שהוא מצב שווי המשקל (ראה דוגמה 2.2.8). ברור שלמעשה התנודות מתרסנות בסופו של דבר והמצפן יצביע צפונה.

מפתח העניינים

נושא	סעיף	עמוד
אנרגיה פוטנציאלית	2.3.8	45
של כובד	2.3.9	46
של קפיץ	2.3.9	46
אנרגיה קינטית		
סיבובית	5.2.1, 5.2.3	133, 134
של גוף קשיח	5.2.1, 5.2.3	133, 134
של חלקיק	2.3.3, 2.3.4	42
של מערכת חלקיקים	3.3.1	63
גוף קשיח	4.1.3	69
אנרגיה קינטית	5.2.1, 5.2.3	133, 134
דרגות חופש	4.1.11	81
הנחות עבור הדינמיקה	5.0.2	120
מהירות זוויתית	4.2.1	82
משוואות הקינטיקה הכלליות	5.0.2	120
משוואות אוילר	5.3.4	144
משוואת התנע הזוויתי	5.3.2, 5.3.3	139,141
תאור הסיבוב	4.1.5	71
תאור התנועה	4.1.4	69
תנע זוויתי	5.1.2	122
גופים ומצביהם	4.1.2	68
דרגות חופש	4.1.1	67
של גוף קשיח	4.1.11	81
הספק	2.3.1	40
וקטורי בסיס	(ראה מערכות קואורדינטות)	
וקטור יחידה משיק	1.4.3	15
וקטור יחידה נורמל לעקומה	1.4.5, 1.4.7	16, 18
זוויות אוילר	4.1.7	72
טנסור ההתמדה (האינרציה)	5.1.2, 5.1.3	122, 124
חישוב האנרגיה הקינטית של גוף קשיח	5.2.3	135

נושא	סעיף	עמוד
יחידות כוח	2.2.16	39
ישרים שווי מהירות	4.2.2	84
כוחות משמרים	2.3.7	44
כיוונים ראשיים	5.1.3	125
מהירות חלקיק (ראה גם קואורדינטות מסוגים שונים)	1.1.2	4
מהירות חלקיק הנע יחסית לגוף קשיח	4.2.11	100
מהירות זוויתית	4.2.1, 4.2.5	89,82
של גוף אשר סובב יחסית לגוף אחר	4.4.2	114
מטריצת קוסינוסי הכיוונים	4.1.5, 4.1.10	71, 79
מישור אוסקולטורי	1.4.1	13
מישור סימטריה	5.1.3	124
מכפלה וקטורית משולשת	4.4.1	113
מכפלה סקלרית משולשת	5.2.2, 4.1.10	134, 79
מכפלות ההתמדה	5.1.3	124
מסלול התנועה של חלקיק	1.1.1	4
מערכות אינרציאליות	2.2.2	24
מערכת גוף קשיח	4.1.4	69
מערכת חלקיקים		
אנרגיה קינטית	3.3.1	63
אנרגיה קינטית יחסית למרכז המסה	3.3.2	63
הנחות לגבי כוחות	3.1.2	49
עבודה ואנרגיה	3.3.3	64
עבודה ואנרגיה במערכת קשיחה	3.3.6	66
עבודה ואנרגיה בתנועת מרכז המסה	3.3.7	66
עבודה ואנרגיה פוטנציאלית של כובד	3.3.4	65
קשיחה	3.3.5	66
שקול הכוחות	3.1.3	51
שקול המומנטים	3.1.4	51
תנע קווי	3.2.1	54
תנע זוויתי	3.2.3, 3.2.5	54, 55
מערכת צירים ראשית	5.1.3	126
מפרק אוניברסלי	4.2.7, 4.3.3, 4.4.4	93, 107, 115
מצב		
גוף	4.1.2	68
גוף קשיח	4.1.4	69
יחוס	4.1.2	68

נושא	סעיף	עמוד
מקום נקודה בתנועת גוף קשיח	4.1.8	77
מרכז המסה	3.1.5	52
מרכז רגעי	4.2.3	85
משוואה מהסוג $\mathbf{a} \times \mathbf{u} = \mathbf{b}$	3.2.7	58
משוואות התנועה של חלקיק	2.2.3	24
כוח תלוי במהירות	2.2.5	26
כוח תלוי במקום	2.2.7	29
משוואות התנועה של מערכת חלקיקים		
מרכז המסה	3.2.2	54
תנע קווי	3.2.2	54
תנע זוויתי	3.2.4	55
תנע זוויתי יחסית למרכז המסה	3.2.6	57
משוואת תנע זוויתי		
של גוף קשיח	5.3.2, 5.3.3, 5.3.4	139, 141,
של חלקיק	2.2.14, 2.2.15	38
של מערכת חלקיקים (ראה משוואות התנועה של מערכת חלקיקים)	3.2.4	55
משיק לתנועה	1.4.1	13
משפט שטיינר	5.1.3	127
נגזרת של וקטור בעל אורך קבוע	1.4.4	15
נגזרת של וקטור הנתון על ידי רכיביו במערכת גוף קשיח	4.2.8	96
נגזרת של וקטור הנתון על ידי רכיביו במערכת סובבת	4.2.9	98
ניוטון, החוק הראשון	2.2.1	23
החוק השני	2.2.3	24
סיבוב של גוף קשיח (קוסינוסי הכיוונים)	4.1.5	75
סימטריה של טנסור ההתמדה	5.1.3	124
עבודה	2.3.2	40
עבודה ואנרגיה, משפט	2.3.5	42
עקמומיות	1.4.5, 1.4.7	16, 18
פרמטר אורך המסלול	1.4.2	14
ציר רגעי	4.2.3	85

נושא	**סעיף**	**עמוד**

נושא	סעיף	עמוד
קואורדינטות פולריות		
וקטורי בסיס	1.3.1	7
תאור מהירות של חלקיק	1.3.3	8
קוארדינטות פולריות (המשך)		
תאור מסלול	1.3.2	8
תאור תאוצה של חלקיק	1.3.4	9
קואורדינטות מסלול		
תאור מהירות של חלקיק	1.4.3	15
תאור תאוצה של חלקיק	1.4.6	18
קואורדינטות קרטזיות		
תאור וקטור	1.2.1	5
תאור מסלול, מהירות ותאוצה של חלקיק	1.2.2	5
קינטיקה וקינמטיקה	1.0.1	4
רדיוס עקמומיות	1.4.5	16
שימור אנרגיה	2.3.11	47
תאוצה זוויתית	4.3.1	101
של גוף אשר סובב יחסית לגוף אחר	4.4.3	115
תאוצה צנטריפטלית	4.3.1	103
תאוצת חלקיק (ראה גם תאור בקואורדינטות שונות)	1.1.3	5
תאוצת קוריוליס	4.3.1	102
תאוצות בתנועת גוף קשיח	4.3.1	101
תנע זוויתי של חלקיק	2.1.2	23
תנע זוויתי של מערכת חלקיקים	3.2.3	54
יחסית למרכז המסה	3.2.5	55
תנע זוויתי של גוף קשיח	5.1.2	122
נגזרת	5.3.2, 5.3.3	139, 141
תנע קווי		
של חלקיק	2.1.1	23
של מערכת חלקיקים	3.2.1	54

קוד מחלקה: 2-1-2139
קוד מחיר:213163